Transferts interplanétaires à faible consommation utilisant les propriétés du problème restreint des trois corps

Maxime Chupin

sous la direction de

Max Cerf, Thomas Haberkorn, Emmanuel Trélat

Soutenance de thèse

19 Octobre 2016

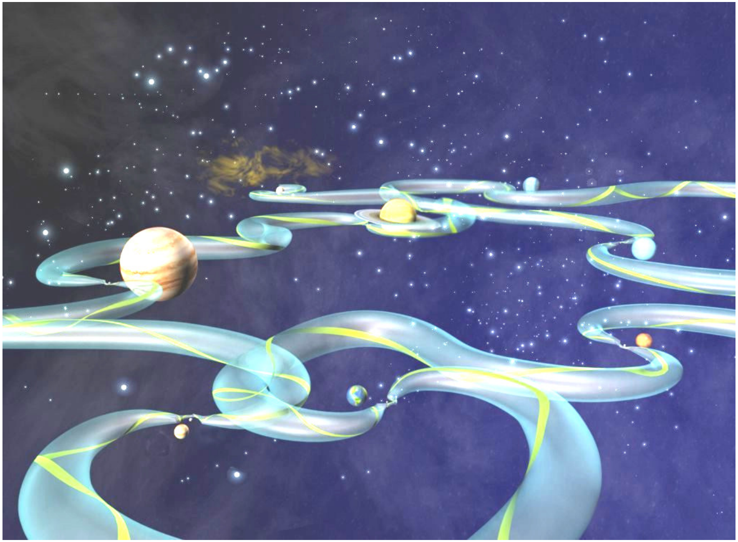
MAPMO Orléans

AIRBUS SAFRAN LAUNCHERS

À la mémoire de Philippe Augros, grâce à qui cette thèse a été possible, et qui nous a quittés bien trop tôt.

But

NASA/Caltech



Plan de la présentation

- **Le problème des trois corps (circulaire restreint)**

  Orbites de Lyapunov/Halo — Les variétés invariantes — Construction de missions spatiales

- **Transfert en poussée faible entre deux variétés**

  Modélisation du problème — Problème de contrôle optimal — Méthodes indirectes — Méthodes de continuation — Algorithme

- **Missions entre orbites autour des points de Lagrange**

  La mission Lyapunov vers Lyapunov — Initialisation d'un tir multiple — Mission entre orbites d'énergies différentes

Problème des 3 corps

- Un satellite P de masse m négligeable
- 2 primaires P_1 et P_2 en rotation circulaire autour de leur centre de masse
- Leurs masses respectives : M_1 et M_2

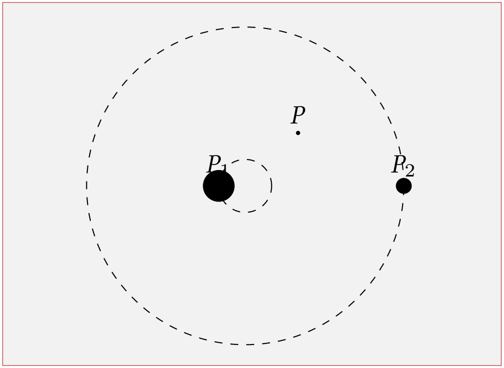
$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = -GM_1 m\frac{\boldsymbol{R}_{13}}{R_{13}^3} - GM_2 m\frac{\boldsymbol{R}_{23}}{R_{23}^3}$$

- Normalisation du système :

distance	$d' = l_* d$
temps	$t' = \frac{t_*}{2\pi} t$
vitesse	$s' = v_* s$

- Le paramètre de masse :

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$$



- Système de coordonnées tournant dans lequel les deux primaires sont fixes (le long de l'axe (Ox))
- Problème circulaire restreint des trois corps (CR3BP)

Système dynamique

Dynamique

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_4 \\
\dot{x}_2 = x_5 \\
\dot{x}_3 = x_6 \\
\dot{x}_4 = x_1 + 2x_5 - (1-\mu)\dfrac{x_1+\mu}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_1-1+\mu}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_5 = x_2 - 2x_4 - (1-\mu)\dfrac{x_2}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_2}{r_{23}^3} \\
\dot{x}_6 = -(1-\mu)\dfrac{x_3}{r_{13}^3} - \mu\dfrac{x_3}{r_{23}^3}
\end{cases}
$$

- État :

$$\xi = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

et

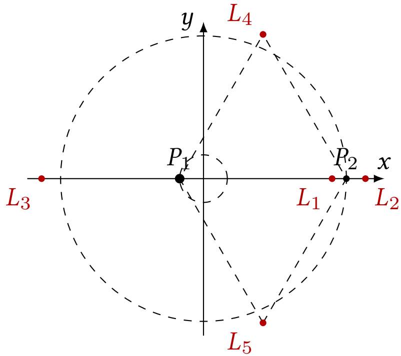
$$r_{13} = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{et} \quad r_{23} = \sqrt{\left(x_1 - x_2^0\right)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

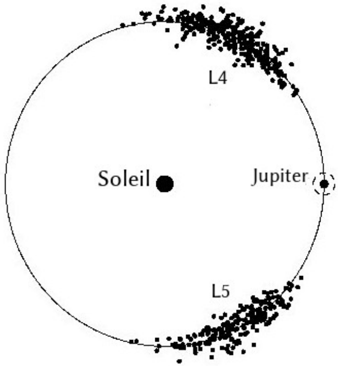
les distances respectives entre le satellite P et les primaires P_1 et P_2

- Système hamiltonien, avec son potentiel noté U
- Notation : $\dot{\xi} = F_0(\xi)$

Points de Lagrange

- Cinq points d'équilibre appelés points de Lagrange
- Points colinéaires : L_1, L_2 et L_3
- Points équilatéraux : L_4 et L_5





- Stabilité étudiée par linéarisation
- L_1, L_2 et L_3 sont instables
- La stabilité de L_4 et L_5 dépend du système
- [Szebehely 67]

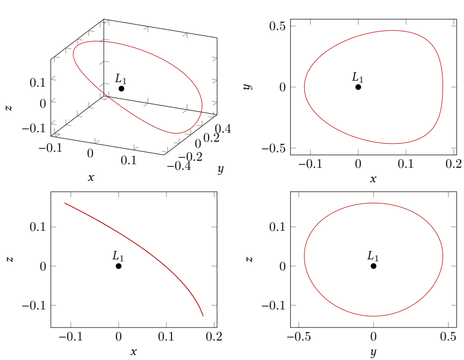
Orbites périodiques

Théorème de Lyapunov-Poincaré

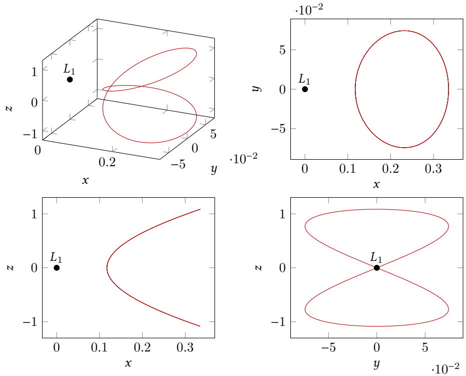
Soit $\dot{x} = H(x)$ un système hamiltonien de $\mathbb{R}^{2n}$, x_0 une position d'équilibre identifiée à 0, et $A = \partial_x H(0)$ la matrice du système linéarisé. On suppose que le spectre de A est de la forme $\sigma(A) = \{\pm i\omega, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2n}\}$, où $\omega > 0$.

Si $\lambda_j / i\omega \notin \mathbb{Z}$ pour un $j \in [\![3, 2n]\!]$, alors il existe une famille d'orbites périodiques issues de 0 à un paramètre. De plus en tendant vers 0, les périodes convergent vers $2\pi/\omega$ et les exposants caractéristiques vers $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$, $j \in [\![3, 2n]\!]$.

orbite de Halo (Soleil-Terre)

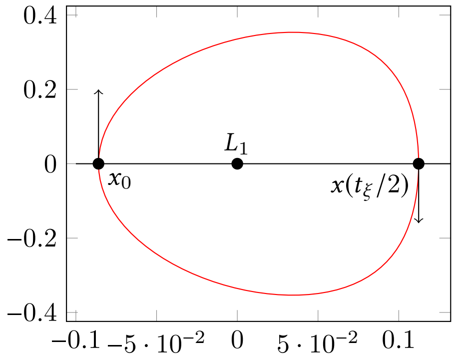


orbite en huit (Terre-Lune)



Orbites de Lyapunov

- Symétrie de la dynamique
- Fonction de tir
- Algorithme de Newton
- Initialisé par une approximation analytique ([Richardson 80], [Gomez *et al.* 91], [Archambeau *et al.* 11], etc.)



- Il existe un t_ξ tels que :

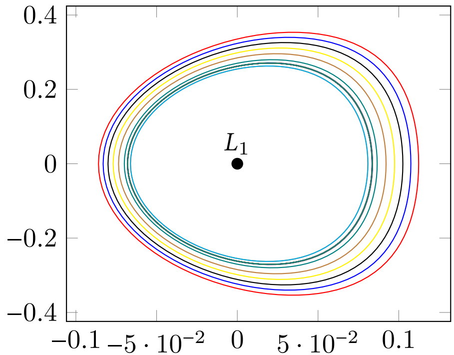
$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t_\xi/2) = x_1, \\ y(t_\xi/2) = 0, \\ \dot{x}(t_\xi/2) = 0, \\ \dot{y}(t_\xi/2) = \dot{y}_1. \end{cases}$$

- On fixe x_0, on définit la fonction de tir :

$$\Longrightarrow \mathcal{S}_L(t_\xi, \dot{y}_0) = \begin{pmatrix} \phi_2(t_\xi/2, \xi_0) \\ \phi_3(t_\xi/2, \xi_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{où } \xi_0 = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0).$$

Famille d'orbites de Lyapunov

- Méthode de continuation : une famille de problèmes $\mathcal{P}_\lambda$, telle que $\mathcal{P}_0$ est *facile* à résoudre, et $\mathcal{P}_1$ est le problème qu'on cherche à résoudre
- Discrétisation de λ, initialisation de $\mathcal{P}_{\lambda_i}$ avec la solution de $\mathcal{P}_{\lambda_{i-1}}$
- On a une orbite d'une certaine énergie $\mathcal{E}_0$ et on veut une orbite d'énergie $\mathcal{E}_1$



- Continuation :

On définit $\mathcal{E}(\xi_0)$ l'énergie de la trajectoire libre passant par $\xi_0 = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0)$ et

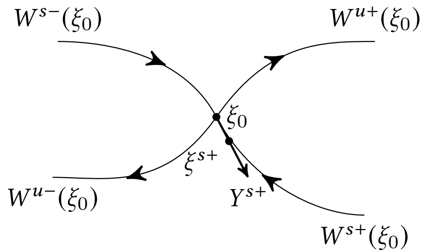
$$\mathcal{E}_\lambda = (1-\lambda)\mathcal{E}_0 + \lambda\mathcal{E}_1$$

On cherche $(t_\xi, x_0, \dot{y}_0)$ tel que

$$\mathcal{P}_\lambda^{\mathcal{E}} : \quad \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^{\lambda}(t_\xi, x_0, \dot{y}_0) = \begin{pmatrix} \phi_2(t_\xi/2, \xi_0) \\ \phi_3(t_\xi/2, \xi_0) \\ \mathcal{E}(\xi_0) - \mathcal{E}_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Variétés invariantes

- **Définition :** Une variété invariante *stable* (resp. *instable*) d'une orbite périodique est l'ensemble des points de l'espace des phases dont les semi-orbites futures (resp. passées) *convergent* vers l'orbite périodique (asymptotiquement). [Koon *et al.*, 06]



- $\bar{\xi}(\cdot)$ solution périodique de période T
- La matrice de monodromie M au point $\bar{\xi}_0$: $M = \dfrac{\partial\phi(T;\bar{\xi}_0)}{\partial\xi_0}$, valeurs propres :

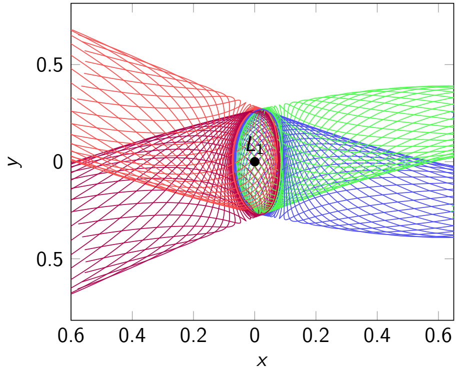
$\lambda_1 > 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1},\ \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_5 = \overline{\lambda_6}$

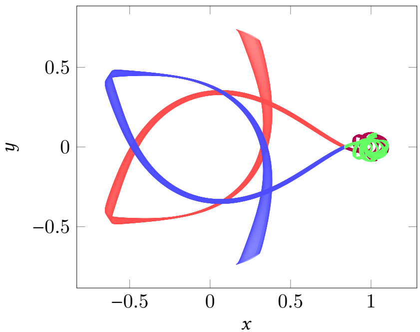
- Approximation linéaire, $\alpha > 0$, intègre en temps futur et passé le point perturbé de l'orbite :

$$\xi^{s\pm}(\xi_0) = \xi_0 \pm \alpha Y^s(\xi_0), \quad Y^s(\xi_0) \text{ vecteur propre stable}$$
$$\xi^{u\pm}(\xi_0) = \xi_0 \pm \alpha Y^u(\xi_0), \quad Y^u(\xi_0) \text{ vecteur propre instable}$$

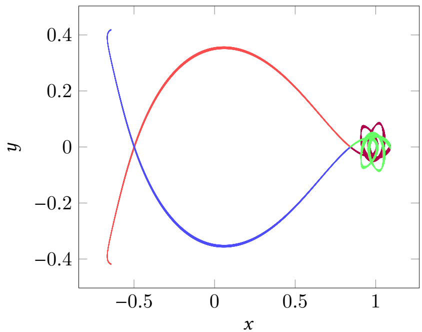
Variétés invariantes

- Séparatrices de la dynamique
- Courants gravitationnels
- Code FORTRAN pour Airbus Safran Launchers





orbite de Lyapunov – Soleil-Terre



orbite en huit – Terre-Lune

Plan de la présentation

- **Le problème des trois corps (circulaire restreint)**

  Orbites de Lyapunov/Halo — Les variétés invariantes — Construction de missions spatiales

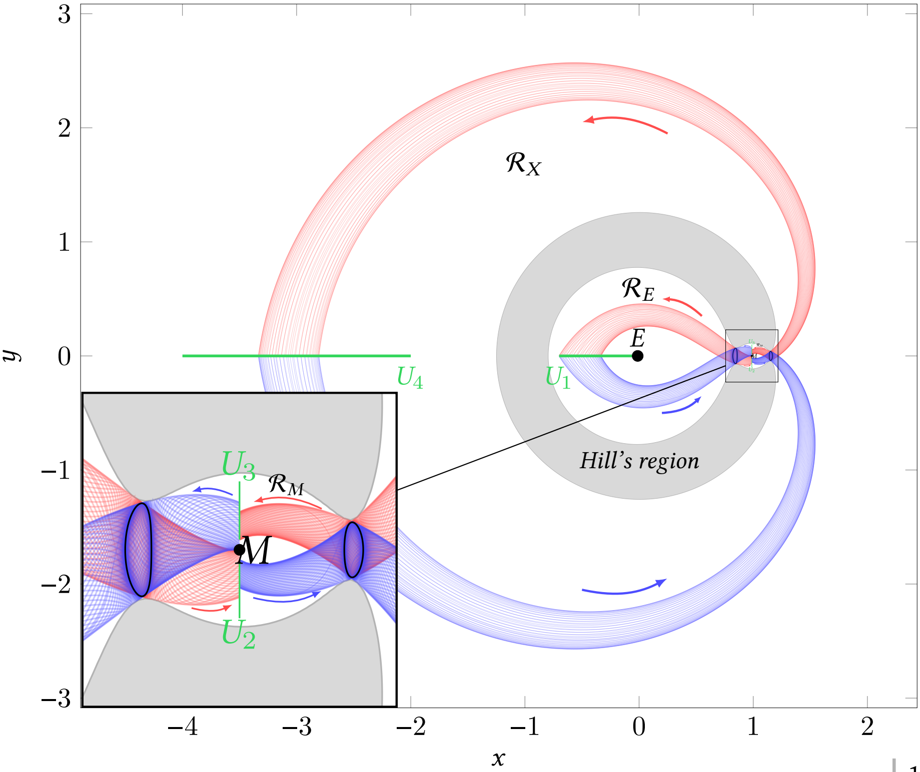
- **Transfert en poussée faible entre deux variétés**

  Modélisation du problème — Problème de contrôle optimal — Méthodes indirectes — Méthodes de continuation — Algorithme

- **Missions entre orbites autour des points de Lagrange**

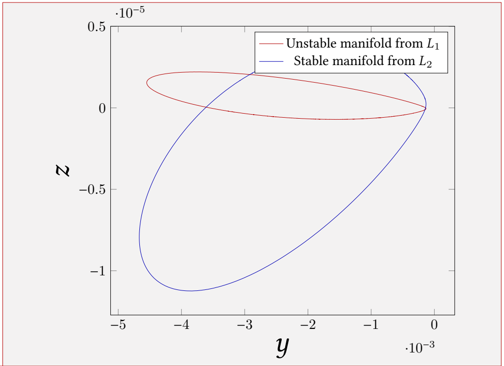
  La mission Lyapunov vers Lyapunov — Initialisation d'un tir multiple — Mission entre orbites d'énergies différentes

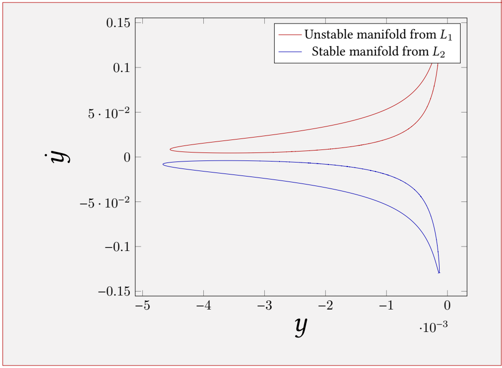
Système Terre-Lune

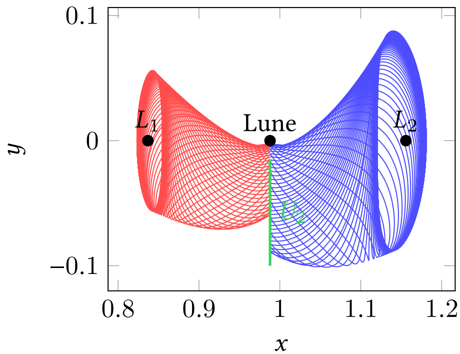


Transfert impulsionnel

- Intersection entre deux variétés
- Intersection en espace qui minimise le ΔV
- Réalisable avec un moteur dit à poussée forte : fournit le ΔV
- [Koon *et al* 06]







Modélisation

- Dynamique contrôlée :

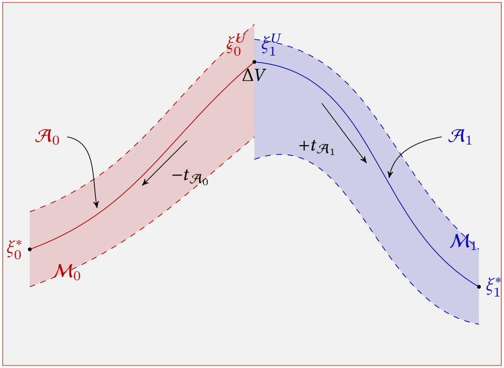
$$\begin{cases} \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \end{cases} \qquad F_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

où $u(\cdot) \in \mathbb{R}^3$, $\|u\| \leqslant 1$, ϵ est la poussée maximale, β_* est une constante modélisant la poussée du moteur

- La contrôlabilité restreinte à un ensemble d'énergies (entre celle de L_1 et L_2) est démontrée (arguments géométriques) [Caillau, Daoud, 12]

- Bonne intuition quant à la contrôlabilité sur le CR3BP complet

Le problème



- Construction d'un problème de contrôle optimal à partir du transfert impulsionnel
- $t_f = t_{\mathcal{A}_0} + t_{\mathcal{A}_1}$
- $\xi_0^* = \phi^{\text{nat}}(-t_{\mathcal{A}_0}, \xi_0^U)$
- $\xi_1^* = \phi^{\text{nat}}(t_{\mathcal{A}_1}, \xi_1^U)$
- $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$: trajectoires libres

$$\mathcal{P}_{m_f} \begin{cases} C_{m_f}(u) = \max m(t_f) \Leftrightarrow \min \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\| \, \mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\| , \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, m(0) = m_0^*, \text{ et } x(t_f) = \xi_1^* \end{cases}$$

Théorie du contrôle optimal

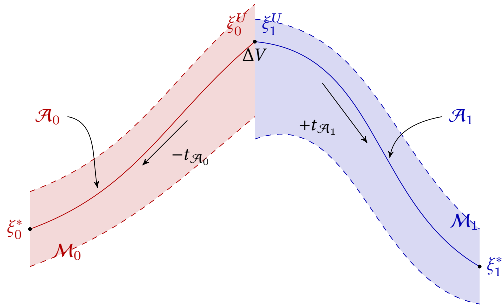
- Le principe du maximum de Pontryagin donne une condition nécessaire d'optimalité
- État adjoint $(p^0, p, p_m) = (p^0, p_{\boldsymbol{x}}, p_{\boldsymbol{v}}, p_m)$
- Hamiltonien ($H_i = \langle F_i(x),\, p\rangle$)

$$\mathcal{H}(x, m, u, p^0, p, p_m) = (p^0 - \beta_* \epsilon p_m)\,\|u\| + H_0 + u_1 \frac{\epsilon}{m} H_1 + u_2 \frac{\epsilon}{m} H_2 + u_3 \frac{\epsilon}{m} H_3,$$

- $\dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x, u, p), \quad \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, u, p), \quad u(t) = \operatorname{argmax}_{\|v\| \leqslant 1} \mathcal{H}(x, m, v, p^0, p, p_m)$
- Structure du contrôle, cas normal : $p^0 = -1$
- Fonction de commutation : $\psi(x, m, p, p_m) = 1 - \beta_* \epsilon p_m - \dfrac{\epsilon}{m}\,\|p_{\boldsymbol{v}}\|$
- Le contrôle est alors bang-bang : 0 ou $\frac{p_{\boldsymbol{p}}}{\|p_{\boldsymbol{v}}\|}$

Fonction de tir

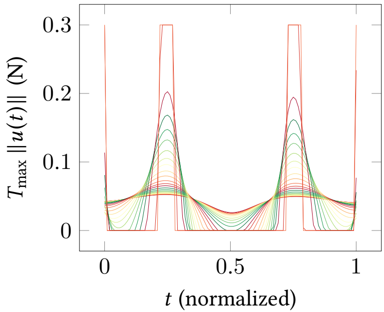
- u fonction de (x, m, p, p_m). PMP $\rightarrow$ écriture du problème en fonction de tir
- Conditions de transversalités : $p_m(t_f) = 0$
- $\boxed{(p(0), p_m(0))\,?}$
- Résolution numérique par méthode indirecte



$$\mathcal{P}_{L^1}\begin{cases} C_{m_f}(u) = \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\|\,\mathrm{d}t \rightarrow \min, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, m(0) = m_0^*, \\ \text{ et } x(t_f) = \xi_1^* \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathcal{S}(p(0), p_m(0)) = \begin{pmatrix} \phi_{1,\ldots,6}^{\text{ext}}(t_f, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) - \xi_1^* \\ \phi_{14}^{\text{ext}}(t_f, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) \end{pmatrix}$$

Continuation sur le coût

- Contrôle bang-bang : difficultés numériques
- Minimisation de la norme L^2 du contrôle : contrôle continu
- Résoudre d'abord le problème avec la norme L^2

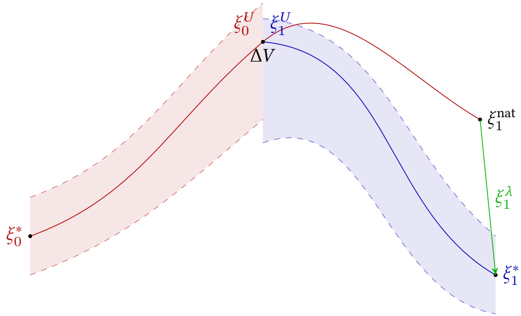


$$\mathcal{P}_{C_\lambda}\begin{cases} C_\lambda(u) = \displaystyle\int_0^{t_f} \left((1-\lambda)\left\|u\right\|^2 + \lambda\left\|u\right\|\right) \mathrm{d}t \to \min, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \left\|u\right\|, \\ \left\|u\right\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, m(0) = m_0^*, \text{ et } x(t_f) = \xi_1^* \end{cases}$$

Continuation sur l'état final

- Minimisation de la norme L^2 du contrôle
- Propagation de ξ_0^* pendant t_f en suivant la dynamique naturelle

$$\xi_1^{\text{nat}} = \phi^{\text{nat}}(t_f, \xi_0^*)$$

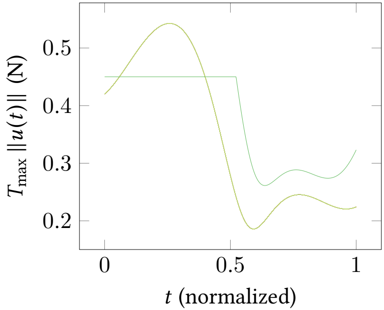


$$\mathcal{P}_{\text{FS}}^{\lambda} \left\{ \begin{array}{l} C_{L^2}(u) = \int_0^{t_f} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t \to \min, \\ \dot{x} = F_0(x) + \frac{\epsilon}{m} \sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, m(0) = m_0^*, \\ \text{ et } x(t_f) = (1-\lambda)\xi_1^{\text{nat}} + \lambda \xi_1^* \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{S}_{\text{FS}}^{\lambda}(p(0), p_m(0)) = \\ \begin{pmatrix} \phi_{1,\ldots,6}^{\text{ext}}(t_f, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) - \xi_1^\lambda \\ \phi_{14}^{\text{ext}}(t_f, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) \end{pmatrix} \end{array}$$

Continuation sur la poussée maximale

- Augmentation du cône d'accessibilité
- Augmentation de la région de convergence du Newton
- Poussée maximale

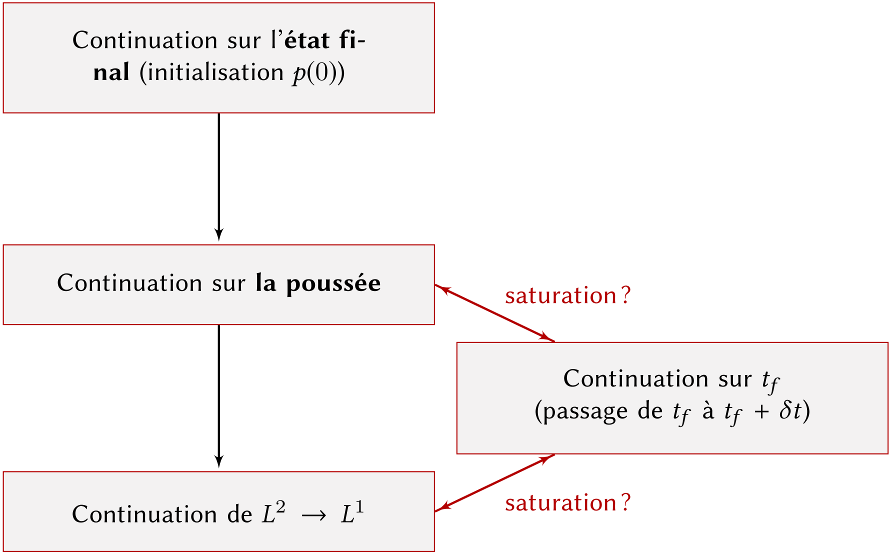
$$\epsilon_\lambda = (1-\lambda)\epsilon_{\text{init}} + \lambda\epsilon_{\text{obj}}$$



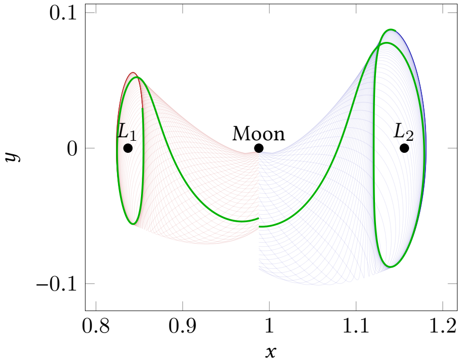
- Par exemple : $\epsilon_{\text{obj}} = 0.45\,\mathrm{N}$ et $\epsilon_{\text{init}} = 60\,\mathrm{N}$

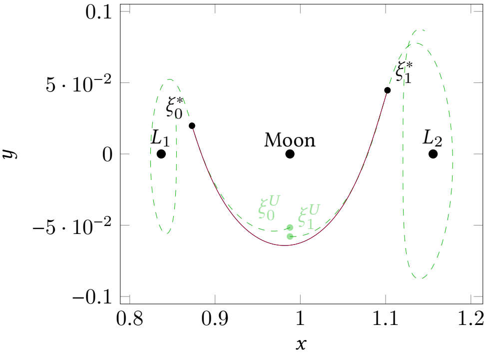
$$\mathcal{P}^{\lambda}_{\text{thrust}}\begin{cases} C_{L^2}(u) = \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\|^2\,\mathrm{d}t \longrightarrow \min, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon_\lambda}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon_\lambda \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, m(0) = m_0^*, \text{ et } x(t_f) = \xi_1^* \end{cases}$$

Algorithme (simplifié)

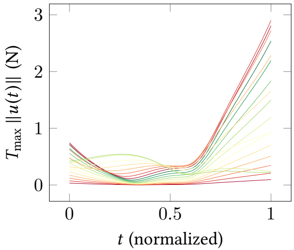


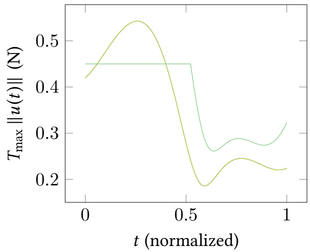
Application Terre-Lune

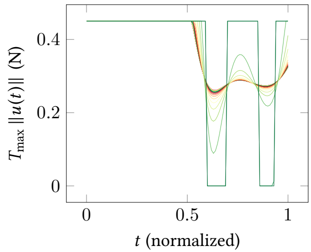




- Calcul total en 13 s, masse initiale 1500 kg, masse finale 1492,885 kg





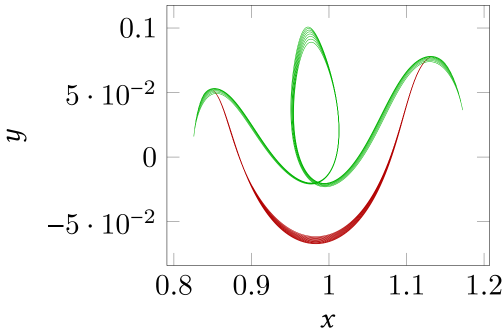


Paramètre de temps t_f

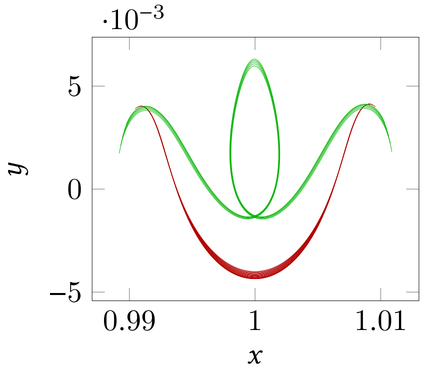
- Minimisation de la consommation $\Rightarrow t_f$ fixé
- Paramètre de temps crucial
- Étude numérique (à poussée maximale fixée) de ce paramètre : choix de $t_f = t_{\mathcal{A}_0} + t_{\mathcal{A}_1}$

En temps « long »

- Bifurcation après un intervalle de temps où l'algorithme échoue



Terre-Lune



Soleil-Terre

Paramètre de temps t_f

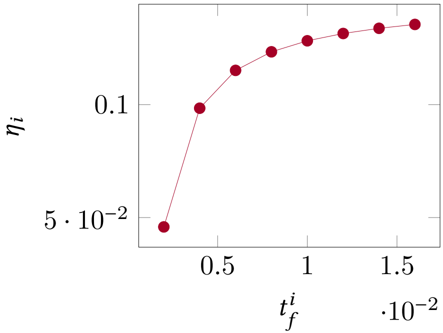
En temps « court »

- Convergence vers le transfert impulsionnel ?

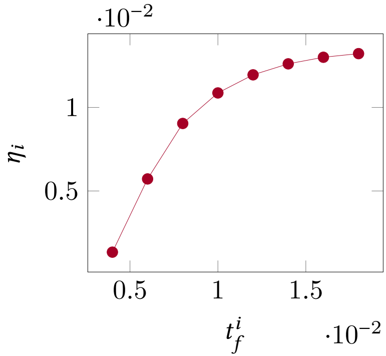
$$\eta_i = \left\| \int_0^{t_f^i} \epsilon_* \frac{\|u(t)\|}{m(t)} \mathrm{d}t - \Delta V \right\|,$$

où ΔV est défini par

$$\Delta V = \left\| \boldsymbol{v}_0^U - \boldsymbol{v}_1^U \right\|$$



Terre-Lune



Soleil-Terre

Plan de la présentation

- **Le problème des trois corps (circulaire restreint)**

  Orbites de Lyapunov/Halo — Les variétés invariantes — Construction de missions spatiales

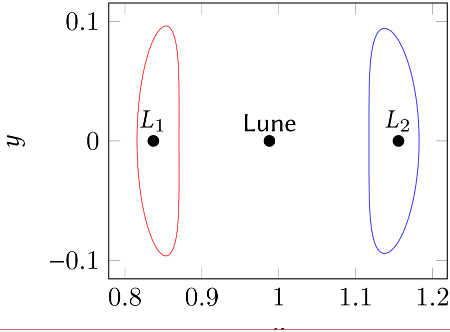
- **Transfert en poussée faible entre deux variétés**

  Modélisation du problème — Problème de contrôle optimal — Méthodes indirectes — Méthodes de continuation — Algorithme

- **Missions entre orbites autour des points de Lagrange**

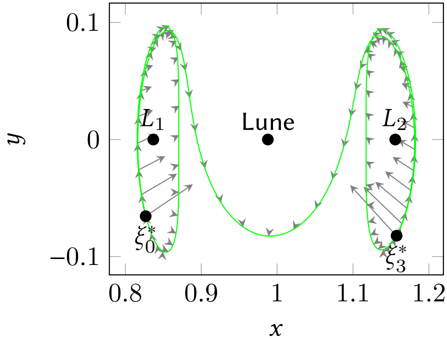
  La mission Lyapunov vers Lyapunov — Initialisation d'un tir multiple — Mission entre orbites d'énergies différentes

Lyapunov vers Lyapunov

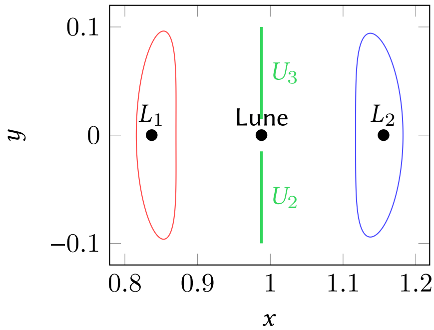


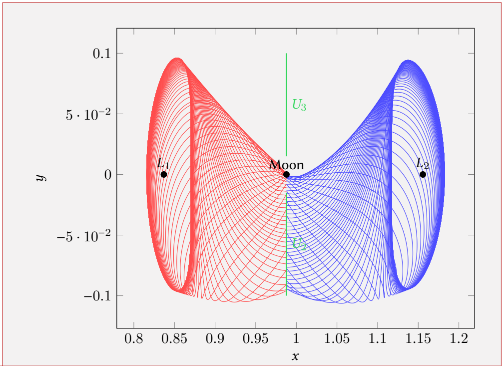
$$
\mathcal{P}_g \begin{cases}
C_g = \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\|^2 \, \mathrm{d}t \to \min, \\
\dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\
\dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\
\|u\| \leqslant 1, \\
x(0) \in \mathsf{Lya}_1, \ \text{et } x(t_f) \in \mathsf{Lya}_2, \\
m(0) = m_0
\end{cases}
$$

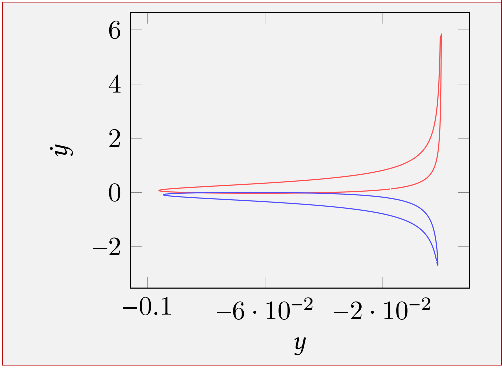
- Construction d'une trajectoire admissible en trois bouts
- Initialiser un tir multiple
- Mission similaire dans [Épenoy 16]

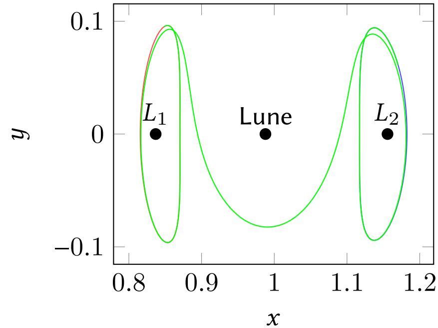


Orbite hétérocline



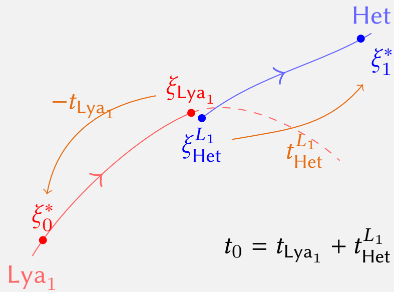






Transfert Lya_1 vers Het

Problème plus simple



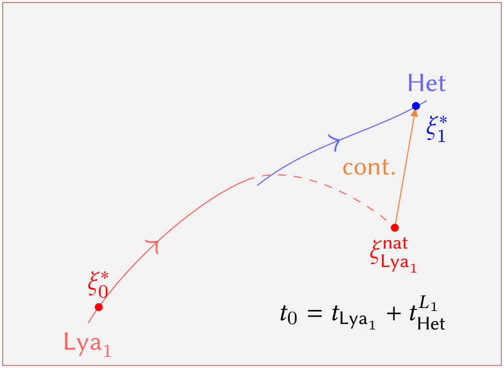
$$\mathcal{P}_{L_1} \begin{cases} \min \displaystyle\int_0^{t_0} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*,\ m(0) = m_0^*, \\ x(t_0) = \xi_1^* \end{cases}$$

- Positions de départ et d'arrivée fixées
- Paramètres t_{Lya_1} et $t_{\text{Het}}^{L_1}$
- Poussée maximale ϵ choisie « assez forte » (60N)

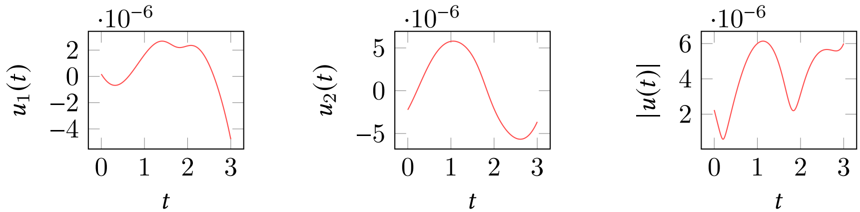
Fonction de tir

$$\mathcal{S}_{L_1}(p(0), p_m(0)) = \begin{pmatrix} \phi_{1,\dots,4}^{\text{ext}}(t_0, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) - \xi_1^* \\ \phi_{10}^{\text{ext}}(t_0, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) \end{pmatrix}$$

Transfert Lya_1 vers Het

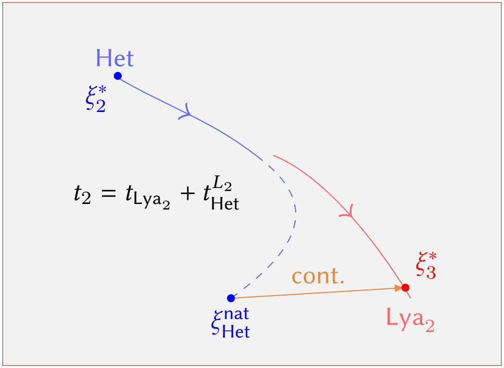


$$
\mathcal{P}_{L_1}^{\lambda}
\begin{cases}
\min \displaystyle\int_0^{t_0} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\
\dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\
\dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\
\|u\| \leqslant 1, \\
x(0) = \xi_0^*,\ m(0) = m_0^*, \\
x(t_0) = \xi_1^{\lambda} = (1-\lambda)\xi_{\text{Lya}_1}^{\text{nat}} + \lambda \xi_1^*
\end{cases}
$$

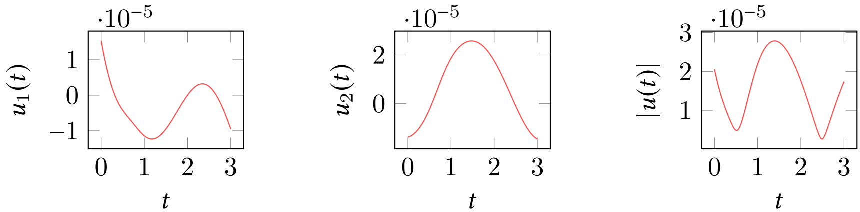


Transfert	Itérations	Coût	$\epsilon \leftrightarrow T_{\max}$	Tps calc.
L_1	21	$6.309\,67 \times 10^{-11}$	60 N	2.821 s

Transfert Het vers Lya$_2$

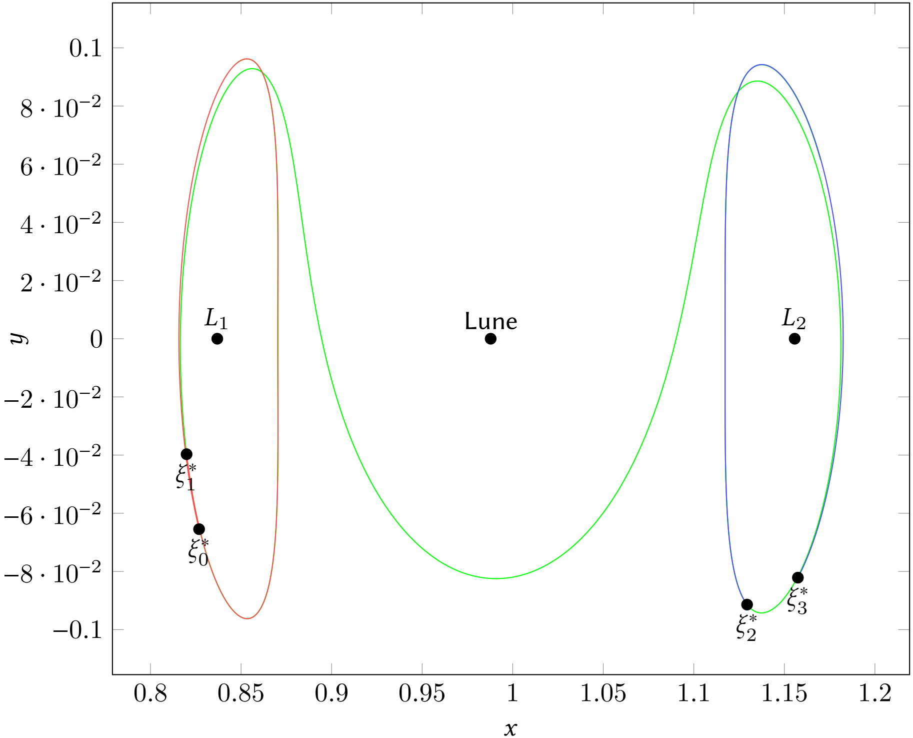


$$
\mathcal{P}_{L_2}^{\lambda}\left\{
\begin{array}{l}
\min \displaystyle\int_0^{t_2} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\
\dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\
\dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\
\|u\| \leqslant 1, \\
x(0) = \xi_2^*,\ m(0) = m_2^*, \\
x(t_0) = \xi_3^{\lambda} = (1-\lambda)\xi_{\mathrm{Het}}^{\mathrm{nat}} + \lambda \xi_3^*.
\end{array}
\right.
$$



Transfert	Itérations	Coût	$\epsilon \leftrightarrow T_{\max}$	Tps calc.
L_2	19	$9.061\,24 \times 10^{-10}$	60 N	1.439 s

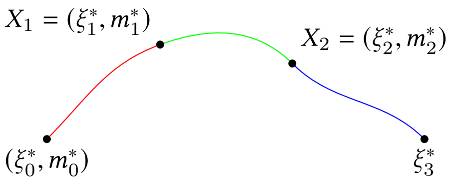
Trajectoire admissible



Tir multiple

- $t_{\text{tot}} = t_0 + t_1 + t_2$

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} \begin{cases} C_{\text{tot}} = \min \displaystyle\int_0^{t_{\text{tot}}} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^* \in \mathsf{Lya}_1,\ m(0) = m_0^*, \\ x(t_{\text{tot}}) = \xi_3^* \in \mathsf{Lya}_2 \end{cases}$$



- États adjoints initialisés avec les calculs précédents et $(p_1^*, p_m^{1*}) = 0$

- Fonction de tir :

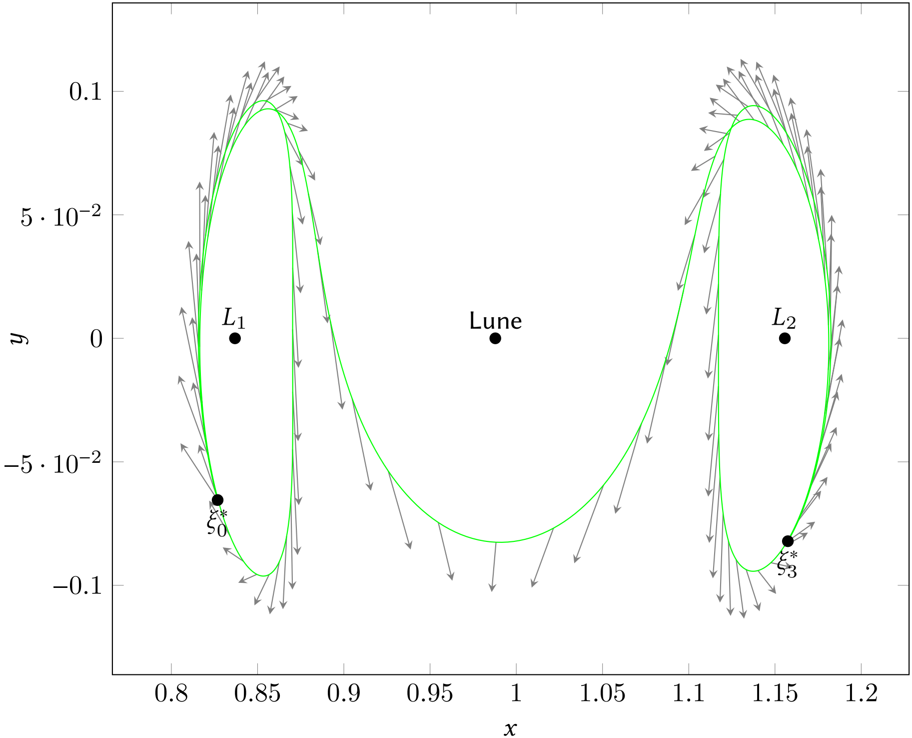
$$\mathcal{S}_{\text{tot}}(p(0), p_m(0)) = \begin{pmatrix} \phi_{1,\dots,4}^{\text{ext}}(t_{\text{tot}}, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) - \xi_3^* \\ \phi_{10}^{\text{ext}}(t_{\text{tot}}, \xi_0^*, m_0^*, p(0), p_m(0)) \end{pmatrix}$$

- Initialisation ?
- Nœuds sur l'hétérocline (ξ_1^*, ξ_2^*)

- Fonction de tir multiple :

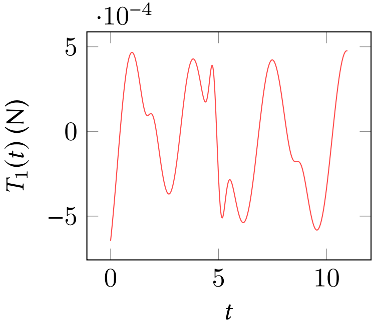
$$\mathcal{S}_{\text{multi}}(Z) = \begin{pmatrix} \phi_{1,\dots,5}^{\text{ext}}(t_0, \xi_0^*, m_0^*, P_0) - X_1 \\ \phi_{6,\dots,10}^{\text{ext}}(t_0, \xi_0^*, m_0^*, P_0) - P_1 \\ \phi_{1,\dots,5}^{\text{ext}}(t_1, X_1, P_1) - X_2 \\ \phi_{6,\dots,10}^{\text{ext}}(t_1, X_1, P_1) - P_2 \\ \phi_{1,\dots,4}^{\text{ext}}(t_2, X_2, P_2) - \xi_3^* \\ \phi_{10}^{\text{ext}}(t_2, X_2, P_2) \end{pmatrix}.$$

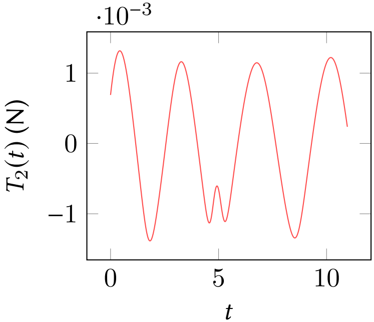
Trajectoire en un bout

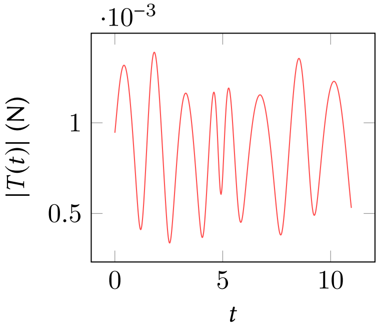


Contrôle associé

- Contrôle tout au long de la trajectoire



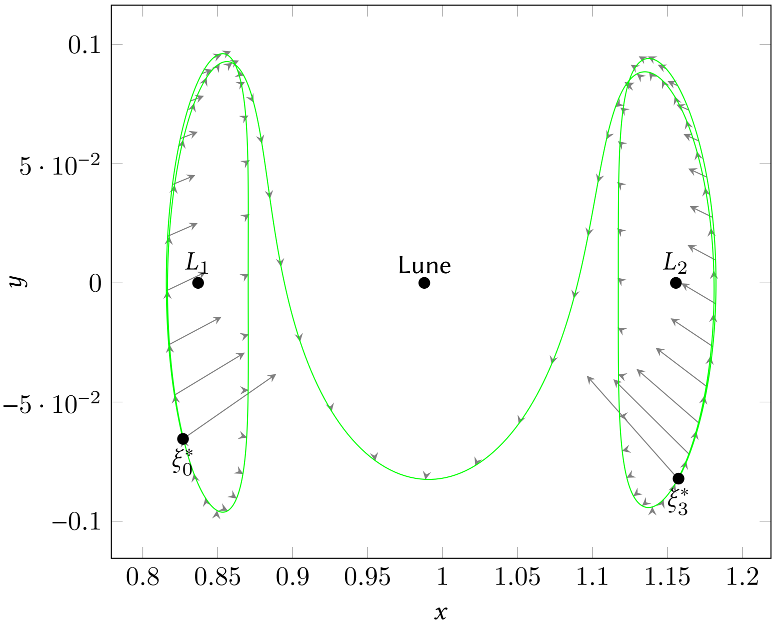




Optimisation des points terminaux

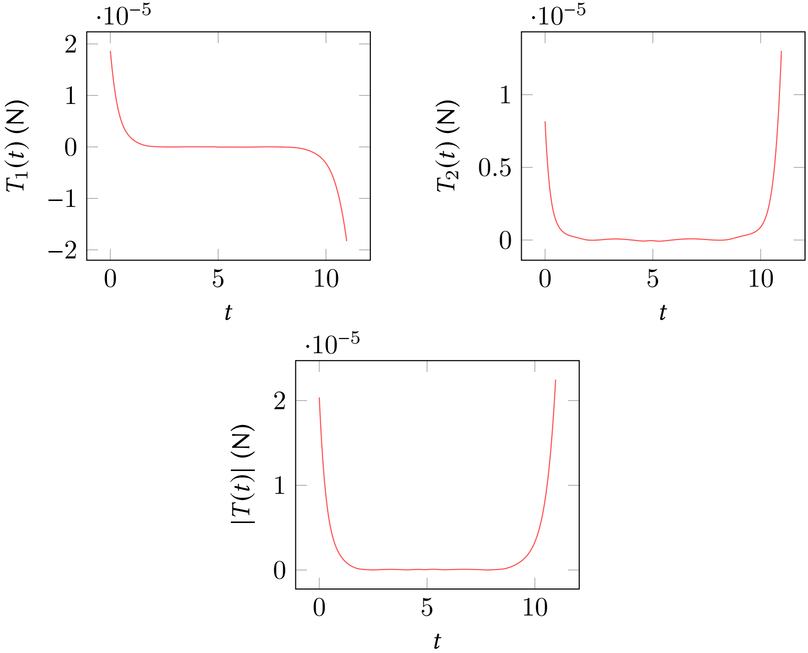
- Conditions de transversalité pour $x(0) \in \mathrm{Lya}_1$ et $x(t_f) \in \mathrm{Lya}_2$ sont :

$$\langle p(0),\, F_0(x(0)) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \left\langle p(t_f),\, F_0(x(t_f)) \right\rangle = 0$$



Contrôle associé

- Effet turnpike [Trélat, Zuazua 15]



Résultats numériques

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} \begin{cases} C_{\text{tot}} = \min \displaystyle\int_0^{t_{\text{tot}}} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^* \in \mathsf{Lya}_1,\ m(0) = m_0^*, \\ x(t_{\text{tot}}) = \xi_3^* \in \mathsf{Lya}_2 \end{cases}$$

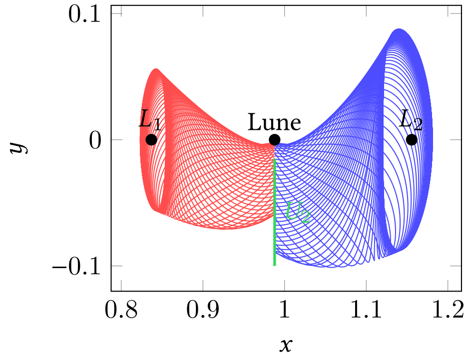
$$\mathcal{P}_g \begin{cases} C_g = \min \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) \in \mathsf{Lya}_1,\ \text{et } x(t_f) \in \mathsf{Lya}_2, \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

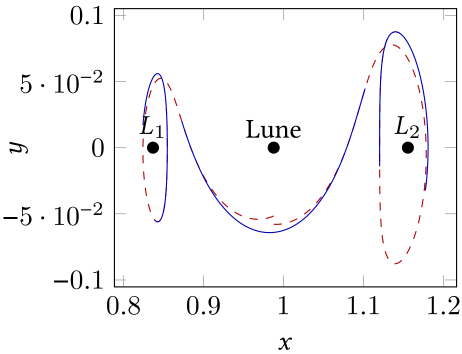
Masse initiale	Temps de tranfert	$T_{\max}$
1500 kg	10.961 39 or 47.67 jours	0.3 N

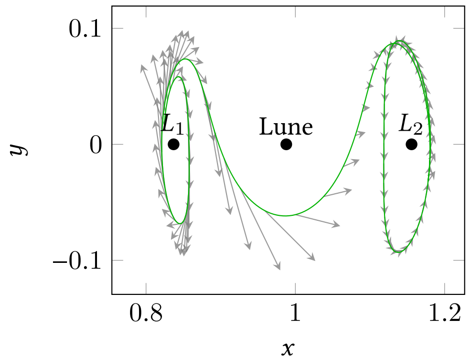
	C_*	Masse de fuel	Tps calc.
$\mathcal{P}_{\text{tot}}$	$1.065\,018\,7 \times 10^{-6}$	0.018 687 8 kg	26.912s
$\mathcal{P}_g$	$2.230\,596\,7 \times 10^{-9}$	$3.670\,958\,9 \times 10^{-4}$ kg	1min18.64s

Halo vers Halo (3D)

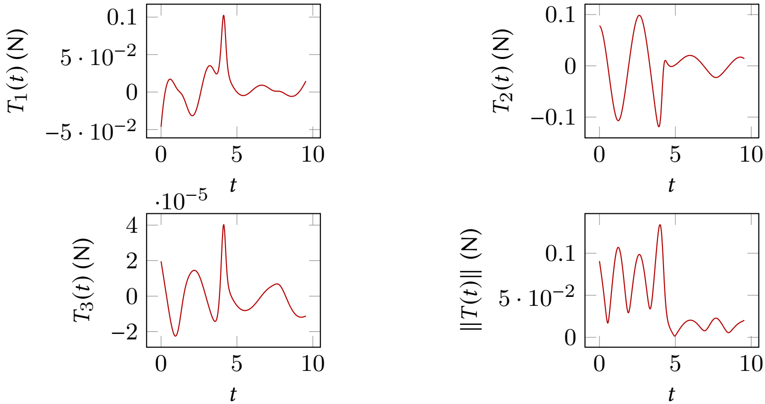
- Orbite périodique non planaire : orbite de Halo
- Énergies différentes en L_1 et L_2
- Pas d'hétérocline
- Initialisation en 5 parties
- Méthode rapide ($\sim 4\,\mathrm{min}$ pour l'ensemble des calculs)







Halo vers Halo (3D)



Masse initiale	Temps de transfert	$T_{\max}$	Tps calc.
1500 kg	9.543 645 446 282 8 or 41.50 jours	0.3 N	4.3 min

	C^3_{tot}	Masse cons.
Halo vers Halo	0.004 619 126 477 355 13	7.415 872 590 999 92 kg

Conclusion

- Compréhension des propriétés dynamiques du CR3BP
- Introduction de l'énergie comme paramètre de continuation pour les orbites périodiques
- Calcul des variétés invariantes (courants gravitationnels)

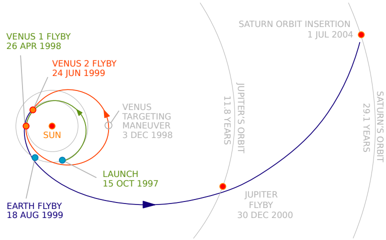
- Méthodes et algorithme développés pour le transfert entre variétés invariantes articulant plusieurs continuations
- Méthodes rapides et efficaces
- Étude du paramètre de temps

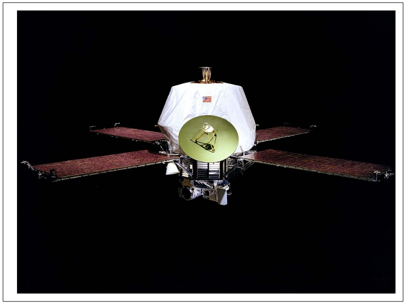
- Application à la construction de missions tests entre orbites périodiques autour des points de Lagrange
  - Fournit un temps de transfert
  - rapide et robuste, cas variés
- M. Chupin, T. Haberkorn, and E. Trélat. *"Low-Thrust Lyapunov to Lyapunov and Halo to Halo Missions with L^2-Minimization"*. In : ESAIM : M2AN (2016, online).

- Application de nos méthodes à la construction de missions depuis la GEO
  - trajectoires admissibles rapidement obtenues
  - tir multiple non opérationnel
  - méthode hybride indirecte/directe

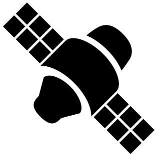
Perspectives

- Couplage de problèmes des trois corps
- Conditions nécessaires et/ou suffisantes du second ordre (théorie des points conjugués)
- Instabilité des systèmes hamiltoniens, stabilité des variétés invariantes
- Prolonger l'étude de l'effet *turnpike*, résultats théoriques





- Amélioration des algorithmes
  - aide à la convergence $L^2 \longrightarrow L^1$
  - amélioration de l'optimisation des points terminaux
  - amélioration de la méthode hybride pour permettre d'ajuster les temps sur les différentes parties



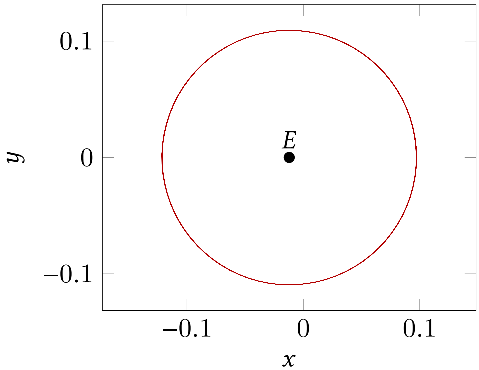
Merci

Départ : la GEO

- *geosynchronous equatorial orbit* (GEO), circulaire rayon 42 164 km

	Rayon	Vitesse	Période
unités SI	42 164 km	$3.0746\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	23.934 461 2 jours
unités CRTBP	0.109 687 254 48	2.891 357 831 71	0.036 494 731 216 772 6

- Injection dans le CR3BP

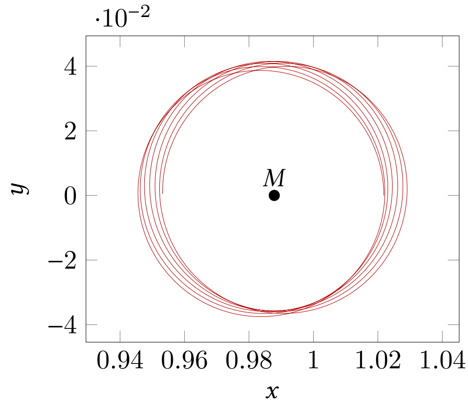


Arrivée : LO

- Orbite périodique autour de la lune : *lunar orbit* (LO)
- Mission SMART1, et [Daoud 11]

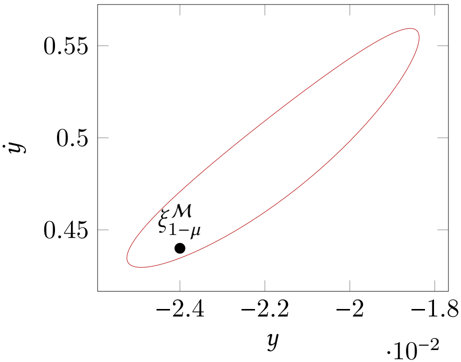
	Rayon	Vitesse	Période
unités IS	$13\,084\,\mathrm{km}$	$0.612\,890\,340\,94\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$9.246\,086\,041$ jours
unités CR3BP	0.034	$0.597\,941\,796\,04$	$0.357\,272\,734\,329\,6$

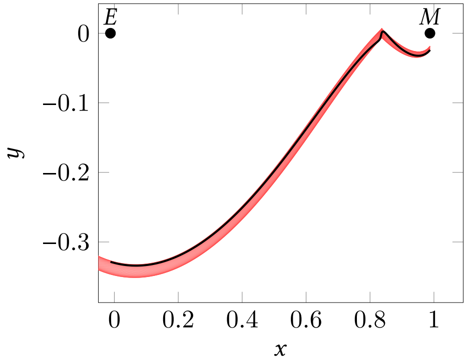
- Injection dans le CR3BP



Le courant gravitationnel

- Variétés invariantes stable et instable d'une orbite périodique autour de L_1
- Section en U_2 ($x = -\mu$), choix d'un point à l'intérieur
- $\mathcal{E}_{\mathsf{Lya}_1} = -1.6001$

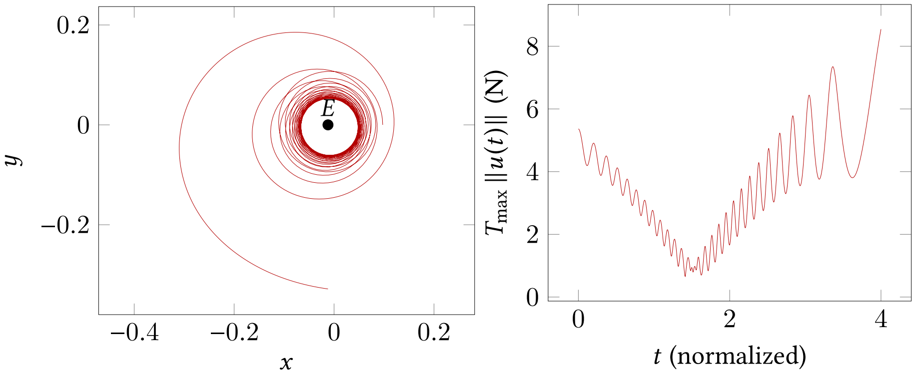




- Deux points aux extrémités : $\xi^{\mathcal{M}}_{-\mu}$ et $\xi^{\mathcal{M}}_{1-\mu}$ et un temps de transfert t_1

Vers la trajectoire libre

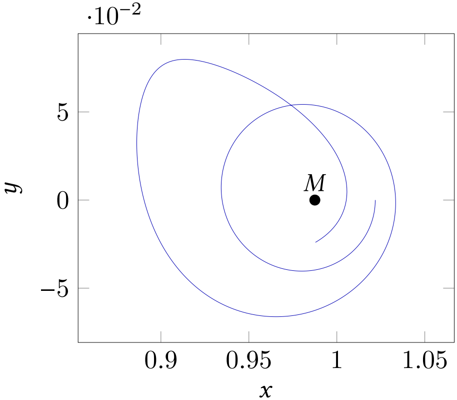
- Choix d'un temps de transfert : $t_0 = 4.0$
- Continuation sur l'état final

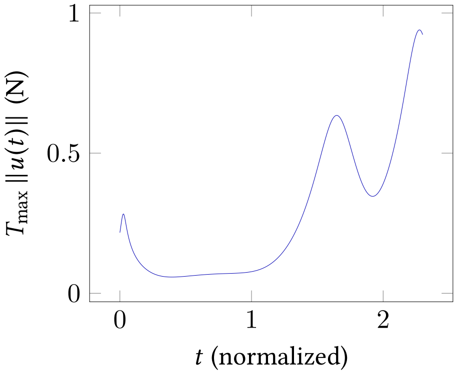


Temps de transfert	Tps calc.	Masse finale
4.0 or 17.397 jours	`cpu 173.86s`	$m(t_0) = 1313.274\,585$ kg

Vers LO

- Choix d'un temps de transfert : $t_2 = 2.3$
- Continuation sur l'état final

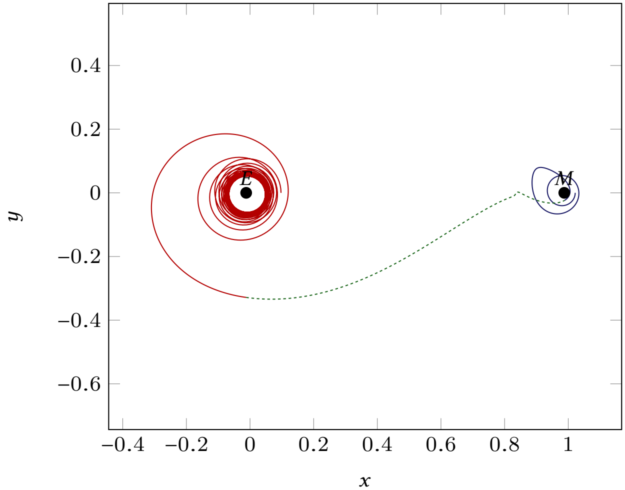




Temps de transfert	Tps calc.	Masse finale
2.3 or 10.003 jours	`cpu 15.27s`	$m(t_f) = 1301.228\,912\,\mathrm{kg}$

Trajectoire admissible

- Temps de transfert $t_f = t_0 + t_1 + t_3$
- Gros gap d'énergies, de $-4.864\,220$ à -1.6001 pour la variété
- Calcul très rapide $\sim 4\,\mathrm{min}$



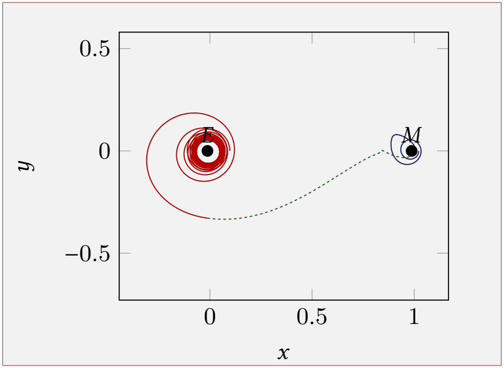
- Masses $m(0) = 1500\,\mathrm{kg}$ et $m(t_f) = 1301.228\,912\,\mathrm{kg}$

Méthode hybride

- Tir multiple ne fonctionne pas
- $\min_{X_1 \in \mathbb{R}^7, X_2 \in \mathbb{R}^7} \mathcal{V}_{\text{tot}}(X_1, X_2)$,

avec

$$\mathcal{V}_{\text{tot}}(X_1,X_2) = \mathcal{V}_0(t_0, X_0^*, X_1) + \mathcal{V}_1(t_1, X_1, X_2) + \mathcal{V}_2(t_2, X_2, \xi_f^*).$$



- Les $\mathcal{V}_i$, $i \in [\![0,2]\!]$, sont les fonctions valeurs

$$\mathcal{P}_0 \begin{cases} C_0 = \min \int_0^{t_0} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^*, \; m(0) = m_0^* \\ x(t_0) = \xi_1, \; m(t_0) = m_1. \end{cases} \quad \mathcal{P}_1 \begin{cases} C_1 = \min \int_{t_0}^{t_1} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(t_0) = \xi_1, \; m(0) = m_1 \\ x(t_1) = \xi_2, \; m(t_1) = m_2. \end{cases} \quad \mathcal{P}_2 \begin{cases} C_2 = \min \int_{t_1}^{t_2} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(t_1) = \xi_2, \; m(t_1) = m_2 \\ x(t_2) = \xi_f^*. \end{cases}$$

Méthode hybride

- Descente de gradient :

$$\nabla_{X_1,X_2}\mathcal{V}_{\text{tot}}$$

- Donné par le vecteur adjoint

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{\text{tot}}}{\partial \xi_1} = p_\xi^0(t_0) - p_\xi^1(t_0),\ \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{tot}}}{\partial \xi_2} = p_\xi^1(t_1) - p_\xi^2(t_1),$$
$$\frac{\partial \mathcal{V}_{\text{tot}}}{\partial m_1} = p_m^0(t_0) - p_m^1(t_0),\ \frac{\partial \mathcal{V}_{\text{tot}}}{\partial m_2} = p_m^1(t_1) - p_m^2(t_1),$$

Gradient Bi-Level Optimization

Require : Initial X_1^0 and X_2^0 associated with P_0^0, P_1^0 and P_2^0.

Initialization of the gradient step : α *(e.g. 1×10^{-2})*

Initialization of the precision : ϵ *(e.g. 1×10^{-8})*

while $\left\|\nabla_{X_1,X_2}\mathcal{V}_T\right\| > \epsilon$ **do**

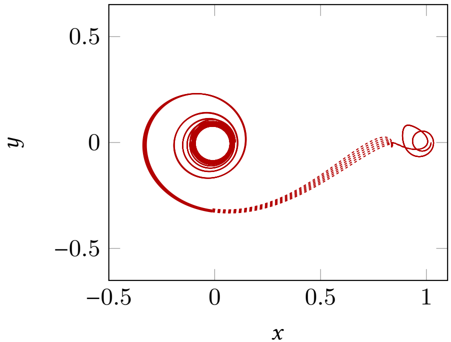
  $(X_1^{i+1}, X_2^{i+1}) \leftarrow (X_1^i, X_2^i) - \alpha\nabla_{X_1,X_2}\mathcal{V}_{\text{tot}}(X_1^i, X_2^i)$

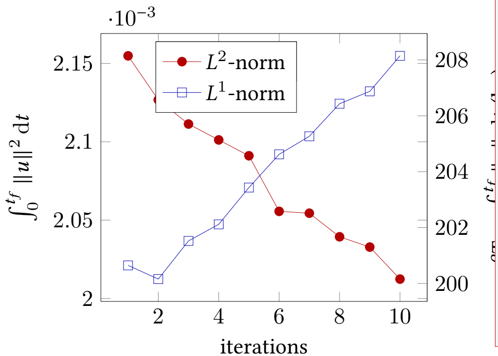
  $(P_0^{i+1}, P_1^{i+1}, P_2^{i+1}) \leftarrow$ `IndirectSolve` *(Adjust the corresponding costates)*

end while

Méthode hybride, résultats

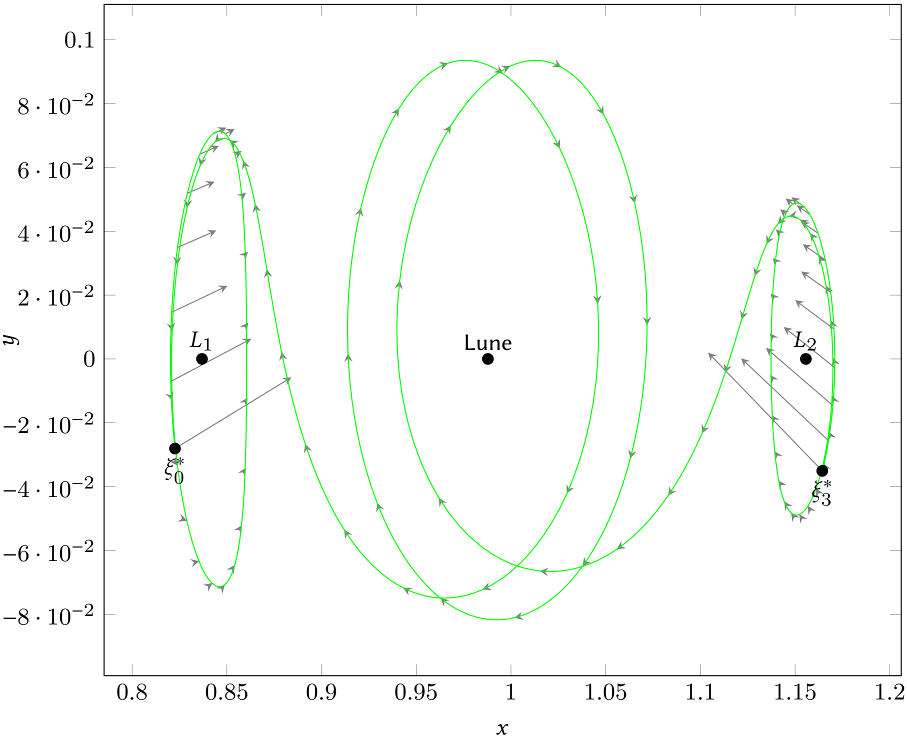
- Amélioration du coût L^2
- Ne converge pas
- Boite de contrainte autour des nœuds





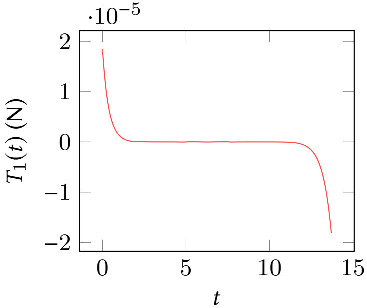
- Le coût L^1 augmente
- Gap d'énergie trop important

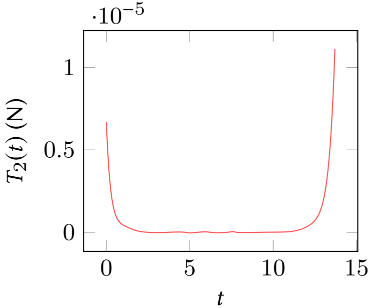
Mission à deux tours

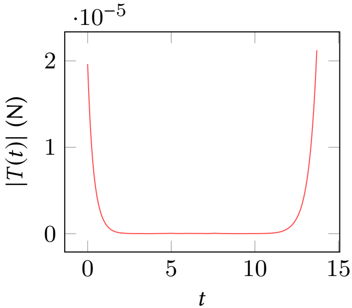


Mission à deux tours

- Effet turnpike







Mission à deux tours

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} \begin{cases} C_{\text{tot}} = \min \displaystyle\int_0^{t_{\text{tot}}} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = \xi_0^* \in \mathsf{Lya}_1,\ m(0) = m_0^*, \\ x(t_{\text{tot}}) = \xi_3^* \in \mathsf{Lya}_2. \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_g \begin{cases} C_g = \min \displaystyle\int_0^{t_f} \|u\|^2 \,\mathrm{d}t, \\ \dot{x} = F_0(x) + \dfrac{\epsilon}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{2} u_i F_i(x), \\ \dot{m} = -\beta_* \epsilon \|u\|, \\ \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) \in \mathsf{Lya}_1,\ \text{et } x(t_f) \in \mathsf{Lya}_2, \\ m(0) = m_0. \end{cases}$$

Masse initiale	Temps de transfert	T_{max}
1500 kg	13.6996 or 59.582 jours	0.3 N

	C_*	Masse cons.	Tps calc.
$\mathcal{P}_{\text{tot}}$	2.4638905×10^{-8}	0.0030131 kg	44.949s
$\mathcal{P}_g$	1.9695934×10^{-9}	3.3599750×10^{-4} kg	2min54.79s

Régions de Hill

- Intégrale du mouvement :

$$E(X) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

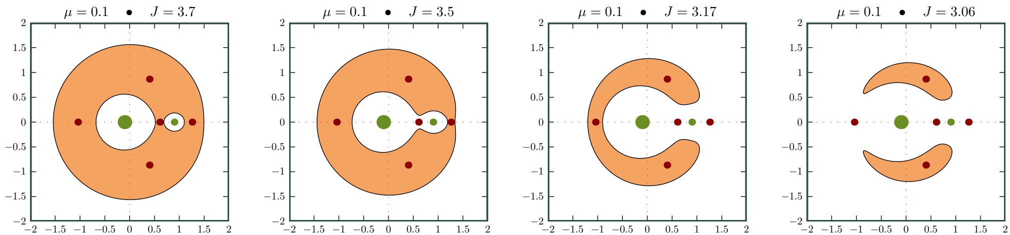
- Intégrale de Jacobi : $J(X) = -2E(X)$

- À énergie donnée e : $M(\mu, e) = \{X = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) | E(X) = e\}$

- Région de Hill :

$$H(\mu, e) = \{(x, y, z) | U(x, y, z) \leqslant e\}$$

On note E_i l'énergie intégrale au point L_i : $E_1 < E_2 < E_3 < E_4 = E_5$



$E < E_1$ | $E_1 < E < E_2$ | $E_2 < E < E_3$ | $E_3 < E < E_4$