TRANSFORMATION DE FOURIER

1 Cas des fonctions L^1

1.1 Une dimension

DÉFINITION 1.1 : Transformée de FOURIER dans R

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ alors *transformée de* FOURIER (T.F.), notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}f$, est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x$$

PROPRIÉTÉ 1.1 :

Voici quelques propriétés immédiates :

❶ $f \in L^1(\mathbf{R}) \Rightarrow x \longmapsto f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \in L^1(\mathbf{R})$

❷ On ramarque que $\widehat{f}$ est bornée :

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_{L^1(\mathbf{R})}$$

1.2 N dimensions

DÉFINITION 1.2 : Transformée de FOURIER dans $\mathbf{R}^N$

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^N)$ alors *transformée de* FOURIER (T.F.), notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}f$, est une fonction de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{C}^N$ définie par :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^N,\ \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

où $x \cdot \xi = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \xi_i$.

PROPRIÉTÉ 1.2 :

Là aussi :

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} ||f||_{L^1(\mathbf{R}^N)}$$

Remarque :

❶ *Il existe d'autres définitions, par exemple :*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_R f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$$

❷ *On définit de la même manière la T.F.* conjuguée *:*

$$\forall f \in L^1(R^N),\ \overline{\mathscr{F}}f = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

❸ *Si f est à variables séparables :*

$$f(x)=\prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)$$

Alors :

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{i=1}^{N} \widehat{f_i}(\xi)$$

2 Le théorème de RIEMANN-LEBESGUE

THÉORÈME 2.1 : RIEMANN-LEBESGUE

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Alors $\widehat{f}$ est une fonction *continue* et qui *tend vers* 0 à l'infini.

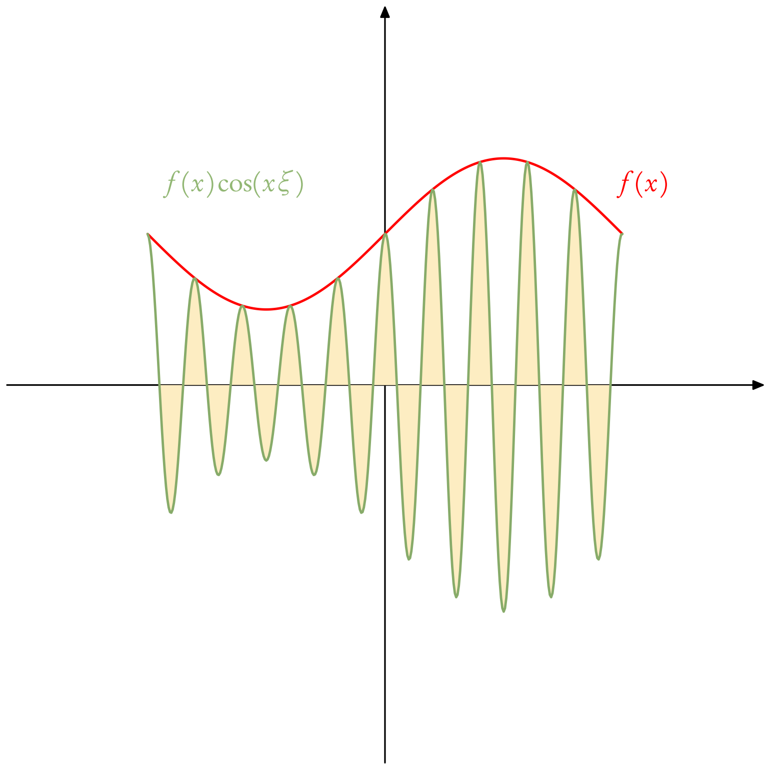

FIG. 1 – Représentation d'une fonction f, de $x \longmapsto f(x)\cos(x\xi)$ et de la partie réelle de la fonction de fourier à ξ fixe

⋆ **Exemple :** On calcule la transformée de FOURIER de $f\ :\ x \longmapsto \chi_{[-a,a]}(x)$ pour a donné.

$$\widehat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

- $\widehat{f}$ est $\mathscr{C}^\infty$ alors que f n'est pas continue.
- $\widehat{f}$ n'est pas intégrable.

⋆

3 Régularité de la transformée

3.1 Définitions

DÉFINITION 3.3 : Décroissance rapide

On dira que f est à *décroissance rapide* si, et seulement si :

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}^N,\ x^\alpha f \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$$

3.2 Une dimension

THÉORÈME 3.2 :

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \longmapsto xf \in L^1(\mathbf{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ et :

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \widehat{(-\mathrm{i}x)f}(\xi)$$

De même, si $x^n f \in L^1(\mathbf{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathscr{C}^n(\mathbf{R})$ et :

$$\frac{\mathrm{d}^n\widehat{f}}{\mathrm{d}\xi^n}(\xi) = \widehat{(-\mathrm{i}x)^n f}(\xi)$$

3.3 n dimensions

THÉORÈME 3.3 :

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Si, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^n$, $|\alpha| \leqslant n$, $x \longmapsto x^\alpha f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ alors $\widehat{f} \in \mathscr{C}^n(\mathbf{R})$:

$$\partial^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-\mathrm{i}x)^\alpha f}$$

où $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$.

4 Régularité de la fonction initiale

Théorème 4.4 : Dimension 1

Soit f une fonction telle que ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont $L^1(\mathbf{R})$ alors :

$$(i\xi)^n \widehat{f} = \widehat{f^{(n)}}$$

Théorème 4.5 : Dimension N

Soit f une fonction telle que à n fixé

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}^N,\ |\alpha| \leqslant n,\ \partial^\alpha f \in L^1(\mathbf{R}^N)$$

alors :

$$(i\xi)^\alpha \widehat{f} = \widehat{\partial^\alpha f}$$

4.1 Translation

Propriété 4.3 : Translation

On définit :

$$\tau_a f(x) = f(x-a)$$

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et $a \in \mathbf{R}^n$. Alors :

$$\mathscr{F}(\tau_a f) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}\mathscr{F}f$$

et :

$$\mathscr{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f) = \tau_a \mathscr{F} f$$

4.2 Fonction f_λ

Propriété 4.4 :

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, on définie $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^*,\ \widehat{f_\lambda}(x) = \frac{1}{|\lambda|^n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

5 Exemples

❶ Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ alors $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$. Grâce aux propriétés ci-dessus on obtient pour $\tau_a f_\lambda(x) = E^{-\lambda^2(x-a)^2/2}$ $(\lambda \in \mathbf{R}^+)$:

$$\widehat{\tau_a f_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\xi^2/2\lambda^2 - \mathrm{i}a\xi}$$

6 Convolution

Rappel : si $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in L^1(\mathbf{R})$ alors $f * g \in L^1(\mathbf{R})$.
En application du théorème de FUBINI, on obtient :

THÉORÈME 6.6 : Convolution

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \in L^1(\mathbf{R})$ alors :

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\,\widehat{g}$$

De même en dimension N :

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}^N\,\widehat{f}\,\widehat{g}$$

7 Transformée de FOURIER des distributions

7.1 L'espace de SCHWARZ $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ et l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^N)$

On a cherché à définir un espace de fonction test $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ tel que :

$$\begin{cases} \mathscr{D}(\mathbf{R}^N) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^N) & (\Rightarrow \mathscr{S}'(\mathbf{R}^N) \subset \mathscr{D}'(\mathbf{R}^N)) \\ \mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^N) & (\Rightarrow \mathscr{F}(\mathscr{D}(\mathbf{R}^N)) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)) \end{cases}$$

DÉFINITION 7.4 : L'espace de SCHWARZ

L'espace de SCHWARZ est défini :

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^N) = \left\{\varphi,\ \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } \forall(\alpha,\beta) \in (\mathbf{R}^N)^2,\ x^\alpha \partial^\beta \varphi \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0\right\}$$

PROPRIÉTÉ 7.5 :

1. L'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ est **complet**.
2. L'espace $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ est **dense** dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

PROPRIÉTÉ 7.6 :

Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$.

1. $\forall \alpha \in \mathbf{R}^N,\ \partial^\alpha \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$
2. Pour toute fonction polynômiale q sur $\mathbf{R}^N$, $q\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$
3. $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$
4. La T.F. est *continue* de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$.

DÉFINITION 7.5 : Distributions tempérées

L'espace $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^N)$ des distributions tempérées est le dual de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$. Autrement dit, une forme linéaire T sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$ est une distribution tempérées si, et seulement si :

$$\exists C > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant n_0 \\ |\beta|\leqslant n_0}} \sup_{x\in\mathbf{R}^N} \left(\left|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right|\right)$$

En pratique, on prend $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^N)$ et on veut savoir si c'est une distribution tempérée. Alors on montre que la continuité est vrai pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^N)$ et *par densité*, T se prolonge à $\mathscr{S}(\mathbf{R}^N)$.

PROPRIÉTÉ 7.7 :

Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^N)$.

1. $\forall \alpha \in \mathbf{R}^N,\ \partial^\alpha T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^N),\ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^N),\ \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle$
2. Pour toute fonction polynômiale q, $qT \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^N)$

Remarque :

$$\mathscr{D}(R^n) \subset \mathscr{S}(R^n) \quad \textit{et} \quad \mathscr{S}'(R^n) \subset \mathscr{D}'(R^n)$$

Attention : *Le produit d'une distribution tempérée et d'une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ ***n'est pas*** *forcément une distribution tempérée !*

PROPRIÉTÉ 7.8 : Fonctions L^1_{loc}

Les fonctions L^1_{loc} ne sont pas nécessairement des distribution tempérées. Cependant les fonctions $f \in L^1_{\text{loc}}$ vérifiant :

$$\forall m \in \mathbf{N},\ \text{p.p. } x,\ |f(x)| \leqslant C(1+|x|^m)$$

appelées fonctions **à croissance lente** sont des distributions tempérées.

Preuve 1 : *On se limite à al dimension 1…*
Soit $f \in L^1_{loc}$, *et* $\varphi \in \mathscr{S}$
On a :

$$I = |\langle f, \varphi\rangle| = \left|\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

D'où :

$$I \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}} (1+|x|^m)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

En multipliant par $\frac{1+|x|^2}{1+|x|^2}$, *on obtient que :*

$$I \leqslant C\int_{\boldsymbol{R}} \frac{1}{1+|x|^2}\,\mathrm{d}x\ \ \sup_{\boldsymbol{R}}(1+|x|^2)(1+|x|^m)\,|\varphi(x)|$$

7.2 La transformée de FOURIER des distributions tempérées

DÉFINITION 7.6 :

Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, on définit $\widehat{T} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \quad \left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

PROPRIÉTÉ 7.9 :

Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, on a :

❶
$$\mathscr{F}(\partial^\alpha T) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \mathscr{F}(T)$$

❷
$$\partial^\alpha \mathscr{F}(T) = \mathscr{F}((-\mathrm{i}x)^\alpha T)$$

THÉORÈME 7.7 : Formule de réciprocité

Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, alors :

$$\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} T) = T$$

La transformation de FOURIER réalise donc une bijection de $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même car elle réalise une bijection de $\mathscr{S}$ dans lui-même dont l'inverse de la transformation conjuguée $\overline{\mathscr{F}}$ est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \quad \overline{\mathscr{F}}(\varphi)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \mathscr{F}(\varphi)(-\xi)$$

7.3 Convolution des transformées de FOURIER des distributions tempérées

THÉORÈME 7.8 : Convolution

Soit une distribution tempérées T et $U \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ **à support compact**. Alors :

$$\mathscr{F}(T * U) = (2\pi)^{n/2} \mathscr{F}(T) \mathscr{F}(U)$$

7.4 Résultats

❶ $\mathscr{F}(1) = (2\pi)^{n/2}\delta$

❷ $\mathscr{F}(\delta) = \widehat{\delta} = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$

❸ $\mathscr{F}(\partial^\alpha \delta) = \dfrac{(\mathrm{i}x)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}}$

❹ Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ et $a \in \mathbf{R}^n$. Alors :

$$\mathscr{F}(\tau_a T) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot\xi}\mathscr{F}T$$

et

$$\mathscr{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot x}T) = \tau_a \mathscr{F}T$$

où l'on rappelle que

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

❺ $\mathscr{F}(Y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\pi\delta - \mathrm{i}\cdot \mathrm{vp}\left(\dfrac{1}{\xi}\right)\right)$

8 Équation de LAPLACE

On recherche ici la solution appelée fonction de GREEN G :

$$\Delta G = \delta$$

9 Formules de GREEN

Soit Ω un ensemble régulier $\Omega \in \mathbf{R}^n$, on note $\Gamma = \partial\Omega$ et n la normale unitaire extérieur à Γ.
Si $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. Alors :

$$\int_\Omega (\Delta u)v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$.