# Stabilité des équilibres

On considère ici l'équation différentielle autonome :

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1}$$

où le champ de vecteurs $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

**Définition**

On dit qu'un point $x_0$ est un **équilibre** de (1) si la fonction constante $x(.) \equiv x_0$ est solution de (1) ou, de façon équivalente, si $f(x_0) = 0$.

**Définition**

On dira d'un *équilibre* qu'il est **stable** si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\left\|x - x_0\right\| < \delta \text{ et } t > 0 \Rightarrow \left\|\phi_t(x) - x_0\right\| < \epsilon$$

Ainsi, « toute solution proche de $x_0$ en reste proche ».

**Définition**

On dira qu'un équilibre $x_0$ est **asymptotiquement** stable s'il est stable et s'il existe un *voisinage* $\mathscr{V}$ de $x_0$ tel que :

$$\forall x \in \mathscr{V},\ \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = x_0$$

## 1 Cas linéaire

On se ramène ici à l'étude de :

$$x'(t) = Ax(t),\ x \in \mathbf{R}^n$$

**Propriété :**

❶ L'origine est un équilibre **asymptotiquement stable** si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ sont de **partie réelle strictement négative** (c'est-à-dire $E^s = \mathbf{R}^n$).

❷ Si $A$ a au moins une valeur propre de partie réelle strctement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de $x' = Ax$.

### 1.1 Cas affine

Considérons

$$x' = Ax + b$$

et un point d'équilibre $x_0$ qui vérifie $Ax_0 + b = 0$ (si $b \in \operatorname{Im} A$). En remplaçant $b$ par $-Ax_0$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}(x(t) - x_0)}{\mathrm{d}t} = A(x(t) - x_0)$$

Ainsi, on se ramène à l'étude du cas linéaire.

## 2 La stabilité par linéarisation

On considère $x_0$ un équilibre de (1).

**Théorème :**

Si toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont de partie réelle strictement négative, alors $x_0$ est un équilibre **asymptotiquement stable**.

**Attention :** Contrairement au cas des équations linéaires, ceci est une condition **suffisante** et pas nécessaire. Il existe des cas où les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont non strictement négatives alors que $x_0$ est un équilibre asymptotiquement stable ($y'(t) = -y^3(t)$).

**Théorème :**

Si $x_0$ est un équilibre stable alors toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont de partie réelle négative ou nulle.

**Attention :** Il est important de noter que les réciproques des deux derniers théorèmes sont **fausses**.

### 2.1 Équilibres hyperboliques

**Définition**

Un équilibre $x_0$ de (1) est dit **hyperbolique** si toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ ont une partie réelle non nulle.

D'après les deux théorèmes précédents :

**Propriété :**

Un équilibre *hyperbolique* est soit *asymptotiquement stable* (si les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont de partie réelle strictement négative) soit non stable.

**Remarque :** les protraits de phase du système et de son linéarisé ont la même allure car il sont de *topologie* équivalente.

## 3 Fonctions de Ljapunov

On reconsidère (1).

**Définition**

Soient $x_0$ un équilibre de (1), $U \subset \Omega$ un voisinage de $x_0$ et $L : U \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On dit que $L$ est une fonction de **Ljapunov** pour (1) en $x_0$ si :

❶ $L(x_0) = 0$ et, pour tout $x \neq x_0$, $L(x) > 0$ ;

❷ la fonction $t \longmapsto L\left(\phi_t(x)\right)$ est *décroissante*.

Si de plus, pour tout $x \neq x_0$, la fonction $t \longmapsto L\left(\phi_t(x)\right)$ est *strictement* décroissante, on dit que $L$ est une fonction de Ljapunov *stricte* pour (1) en $x_0$.

Si $L$ est $\mathscr{C}^1$, on peut remplacer la condition (2) par :

$$\forall x \in U,\ \left\langle \nabla L(x), f(x) \right\rangle \leqslant 0$$

et la condition (3) par :

$$\forall x \in U,\ x \neq x_0,\ \left\langle \nabla L(x), f(x) \right\rangle < 0$$

**Théorème :**

Si l'équation différentielle (1) admet une fonction de Ljapunov en un équilibre $x_0$, alors $x_0$ est un **équilibre stable**. Si de plus la fonction de Ljapunov est stricte, $x_0$ est **asymptotiquement** stable.