Résultats sur l'intégrale de Lebesgue

1 Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

1.1 Fonction indicatrice

Définition 1.1 : Fonction indicatrice

La *fonction indicatrice* ou *fonction caractéristique*, notée $\mathbf{1}_F$ ou χ_F, d'un sous-ensemble F d'un ensemble E est une fonction de E dans $\{0,1\}$ telle que :

$$\mathbf{1}_f = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in F \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Définition 1.2 : Mesure des ensembles

Pour une partie A de $\mathbf{R}^n$, la mesure de a est définie par :

$$\mu(A) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_A(x)\,\mathrm{d}x$$

On dit qu'un ensemble est *négligeable* si sa mesure est nulle.

1.2 Intégrale positives

DÉFINITION 1.3 : Intégrale de LEBESGUE d'une fonction positive

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \overline{R[+]}$. Il existe une application :

$$f \longmapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

❶ linéarité : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{\mathbf{R}^n} f + \mu \int_{\mathbf{R}^n} g.$

❷ croissance : si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} g$

❸ mesure de volumes : pour un pavé $P = [a_1, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_P x = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

❹ **Théorème de BEPPO-LEVI :**
Soit $(f_j)_j$ une suite croissante de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}^+}$. Alors :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \lim_{j \mapsto +\infty} f_j(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{j \mapsto +\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x)\,\mathrm{d}x$$

THÉORÈME 1.1 :

Soit f une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\overline{\mathbf{R}^+}$. Alors :

$$\int_{\mathbf{R}^n} f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ presque partout}$$

« Presque partout » signifie *en dehors d'un ensemble négligeable*.

2 Théorème de la convergence dominée

2.1 Les fonctions intégrables

DÉFINITION 2.4 : Fonction lebesgue-intégrable

la fonction $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{C}$ est lebesgue intégrable si :

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$$

L'ensemble des fonctions intégrables se note $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^n)$.

PROPRIÉTÉ 2.1 :

Soit f et g deux fonctions à valeurs complexes sur $\mathbf{R}^n$. On suppose f intégrable et $f = g$ presque partout. Alors :

❶ g est intégrable.

❷ $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x$

2.2 Théorème de la convergence dominée

THÉORÈME 2.2 : de la convergence dominée

Soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$ et h une fonction lebesgue-intégrale sur $\mathbf{R}^n$. On suppose :

❶ qu'il existe f telle que $f_j \underset{+\infty}{\longrightarrow} f$ presque partout ;

❷ $\forall j, |f_j| \leqslant h$ presque partout.

Alors $f \in \mathscr{L}^1$ et

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_j\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^n} f\,\mathrm{d}x$$

avec $\lim_{j\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} |f_j - f|\,\mathrm{d}x = 0$.

2.3 Continuité-dérivation sous le signe intégral

THÉORÈME 2.3 : Continuité

Soit F une fonction de $A\times B$ dans $\mathbf{C}$, A un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et B une partie de $\mathbf{R}^m$. Si :

- ❶ $\forall y\in B,\ x\longmapsto F(x,y)\in L^1(A)$
- ❷ Pour tout y dans B, l'application $x\longmapsto F(x,y)$ est continue *presque partout*.
- ❸ Il existe $g\in L^1(A)$ telle que pour tout $y\in B$ $|F(x,y)|\leqslant g(x)$ presque partout.

Alors :

$$y\longmapsto f(y)=\int_A F(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ est continue sur } B$$

THÉORÈME 2.4 : Dérivation

Soit A un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et B une partie de $\mathbf{R}^n$. Soit $\alpha\in\mathbf{R}^n$ tel que $|\alpha|=1$. On considère $F\ :\ A\times B\longrightarrow\mathbf{C}$ telle que :

- ❶ $\forall y\in B, \in Ax\longmapsto F(x,y)\in Ł^1(A)$
- ❷ $\forall x,\ y\longmapsto F(x,y)$ admet une dérivé partielle d'ordre α $\partial_y^\alpha F$ presque partout.
- ❸ il existe $g\in L^1(A)$, pour tout $y\in B$ $\left|\partial_y^\alpha F(x,y)\right|\leqslant g(x)$ presque partout

Alors $f\ :\ y\longmapsto\int_A F(x,y)\,\mathrm{d}\mu_x$ possède une dérivée partielle d'ordre α :

$$\partial^\alpha f(y)=\int_A\partial_y^\alpha F(x,y)\,\mathrm{d}\mu_x$$

3 Liens RIEMANN–LEBESGUE

THÉORÈME 3.5 : Primitive

Soit f une fonction continue sur $[a,\ b]$ et F une primitive de f, alors, au sens de LEBESGUE :

$$\int_a^b f=F(b)-F(a)$$

Conséquence : Lorsque f est continue sur un intervalle $[a,\ b]$ alors l'intégrale de RIEMANN et de LEBESGUE *coincident*.

THÉORÈME 3.6 :

Soit f une fonction riemann-intégrable sur $[a,b]$. Alors f est lebesgue-intégrable dur $[a,b]$ et les intégrales sont égales.

THÉORÈME 3.7 :

❶ Soit f une fonction positive sur $\mathbf{R}$, alors :

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

❷ Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, alors :

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4 L'espace L^1

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on rappelle que l'ensemble $\mathscr{L}^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables (au sens de LEBESGUE) sur Ω :

$$\mathscr{L}^1(\Omega) = \left\{ f \Big/ \int_\Omega |f| < +\infty \right\}$$

C'est un espace vectoriel !

DÉFINITION 4.5 : L^1

On définit sur $\mathscr{L}^1(\Omega)$ une *semie-norme* :

$$||f||_{L^1} = \int_\Omega |f|$$

On appelle semie-norme car $||f||_{L^1} = 0$ n'implique pas $f = 0$ mais **seulement** $f = 0$ **presque partout**.
La relation d'égalité *presque partout* est une relation d'*équivalence*.
L'espace-vectoriel quotient de $\mathscr{L}^1$ et de cette relation d'équivalence se note $L^1(\Omega)$. $||.||_{L^1}$ est donc une norme sur L^1.

THÉORÈME 4.8 : Fisher-Riez

L'espace $L^1(\Omega)$ est **complet**.

Remarque : *On ne travaillera qu'avec des classes d'équivalences qui nous manupulerons avec des représentants...*

5 Théorème de Fubini

On considère Ω_1 un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbf{R}^m$. Soit une fonction $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbf{C}$. On note :

❶ $I_1 = \displaystyle\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

② $I_2 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

③ $I_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$

THÉORÈME 5.9 : TORRELLI

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbf{R}^+}$, alors de deux choses l'une :

❶ $I_1 = I_2 = I_3 = +\infty$

❷ $I_1 = I_2 = I_3 < +\infty$

THÉORÈME 5.10 : FUBINI

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbf{R}^+}$ une fonction **intégrable**, alors :

❶ Les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \Omega_1 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \end{array}$$

et

$$h : \begin{array}{ccc} \Omega_2 & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

sont intégrables.

❷ De plus $I_1 = I_2 = I_3$

6 Produit de convolution

DÉFINITION 6.6 : Produit de convolution

Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbf{R})$. On définit le produit de convolution comme :

$$x \in \mathbf{R} \longmapsto \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

que l'on note

$$(f * g)(x)$$

PROPRIÉTÉ 6.2 :

❶ Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbf{R})$. Alors la fonction qui, pour $x \in \mathbf{R}$, $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ appartient à $L^1(\mathbf{R}^2)$.

❷ $f * g \in L^1(\mathbf{R})$

❸ $\|f * g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}$

❹ $(f * g) = (g * f)$