Méthode variationnelle

1 Introduction

Cette méthode permet de montrer le caractère bien posé de nombreux problèmes tels que le problème de Dirichlet :

$$\text{Trouver } u \text{ tel que : } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } (\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } (\partial\Omega) \end{cases}$$

2 Formulation variationnelle

On considère le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V,\ a(u,v) = \ell(v) \end{cases}$$

Définition 2.1 : Cœrsivité

Une forme *sesquilinéaire* $a(u,v)$ est dite cœrsive sur V s'il exite une constante strictement positive α telle que :

$$\forall v \in V,\ |a(u,u)| \geqslant \alpha \, ||u||_V^2$$

Théorème 2.1 : de Lax-Milgram

Si :

1. l'espace V est un Hilbert ;
2. la forme $a(u,v)$ est continue :

$$\exists C_a > 0,\ |a(u,v)| \leqslant C_a \, ||u||_V \, ||v||_V$$

3. la forme a est **cœrsive**
4. la forme $\ell(v)$ est continue :

$$\exists C_l > 0,\ |\ell(v)| \leqslant C_l \, ||v||_V$$

alors le **problème est bien posé**, c'est-à-dire qu'il admet une solution unique $u \in V$.