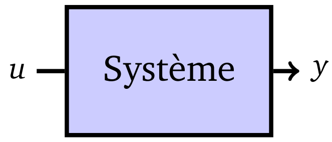
Application à l'automatique

1 Système de commande

L'objet de l'automatique est l'étude des systèmes sur lesquels on peut agir par le biais d'une commande. Il en résulte une *relation entrée–sortie*.



où u représente la commande et y la sortie. On note $x(.)$ la fonction d'état du système.

Définition

1. **Commandabilité** : Est-il possible de trouver une commande u qui amène le système, initialement dans l'état $x(0$, dans un état v quelconque au temps $t = \tau$.
2. **Observabilité** : La connaissance de $y(t)$ et de $u(t)$ pour tout $t \in [0, \tau]$ permet-elle de déterminer l'état $x(t)$ pour tout $t \in [0, \tau]$ (ou, cequi est équivalent, l'état initial $x(0)$).
3. **Stabilisation** : Est-il possible de construire une commande $u(.)$ qui stabilise *asymptotiquement* e système autour d'un équilibre x_0.

2 Les sytèmes linéaires

On étudie le sytème suivant :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. , \quad t \in [0, \tau]$$

On se limitera au cas où les grandeurs sont de dimensions finie : $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$. Il en découle que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ et $D \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbf{R})$. La commande sera supposée **continue par morceaux**.

Propriété : Formule de la variation de la constante

Soient $u(.)$ une commande et $x_0 \in \mathbf{R}^n$. L'**unique** solution de $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ valant x_0 en $t = 0$ est :

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA} x_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} Bu(s) \, \mathrm{d}s$$

3 Commandabilité

On considère la système (Σ). On s'intéresse ici uniquement à la loi entrée–état, c'est-à-dire

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

Définition

Étant donné $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on dit qu'un état $v \in \mathbf{R}^n$ est **atteignable en temps** τ à partir de x_0 s'il existe une loi de commande $u : [0, \tau] \to \mathbf{R}^m$ telle que $x(\tau) = v$ ($x(.)$ étant la solution de (1) satisfaisant $x(0) = x_0$.

On note $\mathscr{A}(\tau, x_0)$ l'ensemble des états atteignables à partir de x_0 en temsp τ, c'est-à-dire :

$$\mathscr{A}(\tau, x_0) = \left\{ x(\tau) \middle/ \begin{array}{c} x(.) \text{ sol. de } (\Sigma) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\}$$

De la formule de la variation de la constante, il résulte que $\mathscr{A}(\tau,0)$ est un espace-vectoriel, et que :

$$\mathscr{A}(\tau,x_0) \text{ est l'espace affine } \mathrm{e}^{\tau A}x_0+\mathscr{A}(\tau,0)$$

Définition

On dit que le système (Σ) est **commandable en temps** τ si $\mathscr{A}(\tau,0)=\mathscr{A}_\tau=\mathbf{R}^n$

Théorème :

L'espace $\mathscr{A}_\tau$ est égal à l'image de la matrice $(n\times nm)$

$$C=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$$

dite *matrice de commandabilité*.

Propriété : Critère de commandabilité Kalman

Le système (Σ) est **commandable** si et seulement si la matrice de commandabilité est de **rang** n.

4 Observabilité

Le problème : connaissant y et u pour tout $t\in[0,\ \tau]$, est-il possible de déterminer la condition initaile $x(0)$.
Remarques :

❶ la connaissance de $x(0$ est équivalante à celle de $x(t)$ pour tout $t\in[0,\ \tau]$ en vertu de la formulation de variation de la constante.

❷ puisque $u(.)$ est connue, on peut se restreindre à étudier :

$$(\Sigma_0)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & Ax(t)\\ y(t) & = & Cx(t)\end{array}\right. ,\quad t\in[0,\tau]$$

Définition

Appelons *espace d'inobservabilité* $\mathscr{I}_\tau$ du système (Σ_0) l'ensemble des conditions initiales $x(0)\in\mathbf{R}^n$ pour lesquelles la solution $y(.)$ est identiquement nulle sur $[0,\ \tau]$:

$$\mathscr{I}_\tau=\left\{x_0\in\mathbf{R}^n \middle/ \begin{array}{c}\text{la solution de } \Sigma_0\\ \text{avec } x(0)=x_0 \text{ vérifie } y(t)\equiv 0\end{array}\right\}$$

Définition

On dit que le système est observable si l'espace d'inobservabilité de (Σ_0) est réduit à $\{0\}$

Propriété :

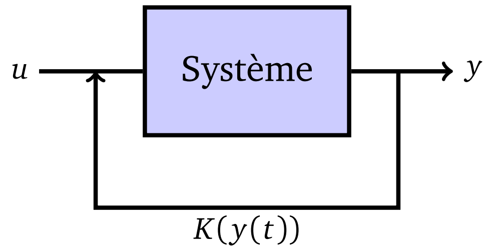
Si le système $\Sigma)$ est **observable**, la connaissance de $y(.)$ sur $[0,\ \tau]$ détermine de façon univoque $x(0)$

Propriété : Critère d'observabilité de Kalman

L'espace d'inobservabilité du système (Σ_0) est le **noyau** de la matrice $(np\times n)$:

$$\mathscr{O}=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix}$$

5 Stabilisation



On suppose ici que $y = x$ pour des raisons de simplification. On cherche ici à construire la commande u *par retour d'état* qui amène le sytème à l'origine, *quelquesoit* le point de départ.
On étudie alors :

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2}$$

Définition

Le système de commande (2) est **asymptotiquement stabilisable** par retour d'état s'il existe une loi de commande $u(t) = K(x(t))$ telle que l'équation différentielle :

$$x'(t) = Ax(t) + BK(x(t))$$

soit asymptotiquement stable, c'est-à-dire que, pour toute condition initiale $x(0)$, la solution $x(t)$ associée tende vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Nous chercherons le retour d'état sous la forme d'une fonction linéaire indépendante du temps : $u(t) = Kx(t)$.
L'équation différentielle à étudier est alors :

$$x'(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t)$$

Or on sait qu'une telle équation différentielle est asymptotique stable si et seulement si la matrice $A + BK$ a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives.
Existe-t-il $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ telle que $A + BK$ satisfasse cette condition ?

Théorème : placement des pôles

Si A et B satisont le *critère de* Kalman, alors, pour tout polynôme normalisé $P(\lambda)$ de degrès n, il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ telle que le polynôme caractéristique de $A + BK$ égale $P(\lambda)$.

On a donc :

Propriété :

Si le système (2) est **commandable**, alors il est **asymptotiquement stabilisable** par retour d'état proportionnel.