Introduction à la théorie des distributions

1 Fonctions tests

Définition 1.1 : Espace des fonctions tests

Soit Ω un espace topologique. L'espace des fonctions tests $\mathscr{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur Ω à support compact inclus dans Ω.

2 Distributions

Remarque : *on utilisera la notation T pour les distributions et $\langle T, \varphi\rangle$ qui signifie que l'on applique T à φ (équivalent à $T(\varphi)$).*

Définition 2.2 : Distributions

Une distribution est une **forme linéaire continue** sur $\mathscr{D}(\Omega)$. L'ensemble des distributions est donc le dual topologique de $\mathscr{D}(\Omega)$ on le note donc $\mathscr{D}'(\Omega)$.
Le terme de *forme linéaire* n'est pas particulier. Par contre, la notion de **continuité** est particulière :

$$\forall K \text{ compact } \subset \Omega,\ \exists C_k > 0,\ \exists m_k > 0,\ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_k \sup_{|\alpha| \leqslant m_k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Remarque : *On utilise $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n$, $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ et $\partial^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$.*

3 Exemple de distributions

3.1 Les fonction L^1_{loc}

Définition 3.3 : Fonctions localements intégrables

Une fonction f $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est une fonction intégrable sur un compact inclu dans Ω.

Propriété 3.1 : Les fonctions L^1_{loc}

Soit f une fonction $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, alors l'application :

$$T_f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

est une **distribution**.

Preuve 1 : ***La démonstration de la linéairité est immédiate. Reste à montrer la continuité. Soit K un compact inclu dans Ω, et φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support dans K. On a***

$$\left\langle T_f, \varphi \right\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_K f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

On a alors :

$$\left\langle T_f, \varphi \right\rangle \leqslant \int_K |f(x)\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, avec $C_k = \displaystyle\int_K |f(x)|\,\mathrm{d}x$ ***et*** $m_k = 0$***, on vérifie la continuité de*** $\langle T_f, \varphi\rangle$***.***

Remarque : *Pour* $(f, g) \in L^1_{loc}(\Omega)^2$ *telles que*

$$f = g \text{ presque partout}$$

alors

$$T_f = T_g$$

Remarque : $T_f = T_g \Rightarrow f = g$ *presque partout*

3.2 La masse de Dirac

Définition 3.4 : La masse de Dirac

Soit $a \in \mathbf{R}$, alors la masse de Dirac est définie par :

$$\delta_a : \begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a) \end{array}$$

Preuve 2 : ***La preuve de la continuité est assez aisée :*** $|\delta_a| = |\varphi(a)| \leqslant \sup_{x\in\boldsymbol{R}} |\varphi(x)|$

4 Dérivation au sens des distributions

Propriété 4.2 : Dérivation

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. L'application :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \varphi & \longmapsto & -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle \end{array}$$

est une distribution.

Preuve 3 : ***La preuve de la linéarité ne pose pas de problème. Démontrons que c'est une application continue.***
Soit K ***un compact et*** φ ***une fonction*** $\mathscr{C}^\infty$ ***telle que supp***$(\varphi) \subset K$***. On a :***

$$T \textit{ distribution} \Rightarrow \exists C_k, \exists m_k, |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_k \sup_{|\alpha|\leqslant m_k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Puisque φ ***est*** $\mathscr{C}^\infty$ ***alors on a :***

$$\left| \langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle \right| \leqslant C_k \sup_{|\alpha|\leqslant m_k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

PROPRIÉTÉ 4.3 : Liens dérivation usuelle et dérivation au sens des distributions

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, on a :

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

Preuve 4 : ***On se restreint ici à la dimension 1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\boldsymbol{R})$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R})$. On a, par définition :***

$$\left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \varphi' \right\rangle$$

i.e. :

$$\left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \varphi' \right\rangle = -\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Par IPP, on a :

$$\left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle = -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\boldsymbol{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Or puisque φ est à support compact, on a :

$$\left\langle (T_f)', \varphi \right\rangle = \int_{\boldsymbol{R}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle T_{f'}, \varphi \right\rangle$$

5 Quelques propriétés, définitions

PROPRIÉTÉ 5.4 :

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ f(x) \neq 0.$$

Alors pour $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$:

$$fT = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

PROPRIÉTÉ 5.5 : Division dans l'ensemble des distributions

1. Les distributions $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ solutions de l'équation :

$$(x-a)T = 0$$

sont de la forme $T = k\delta_a$ où k est une constante réelle.

2. Les distributions $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ solutions de l'équation :

$$(x-a)^2 T = 0$$

sont de la forme $T = k_1\delta_a + k_2\delta'_a$ où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

DÉFINITION 5.5 : Valeur principale

On définit la *valeur principale de x* comme étant la dérivée au sens des distribution de $x \longmapsto \log|x|$. On la note $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. On a, par définition :

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

PROPRIÉTÉ 5.6 : Distributions à dérivée nulle

Les distributions $T \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ telles que $T' = 0$ sont les distributions associées aux *fonctions constantes*.

6 Dérivation d'une fonction discontinue

THÉORÈME 6.1 : Dérivation d'une fonction discontinue

On considère une fonction f $\mathscr{C}^1(]-\infty, a[)$ et $\mathscr{C}^1([a, +\infty[)$.
On a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, et on l'indentifie à la distribution T_f. Alors :

$$(T_f)' = (f(a^+) - f(a^-))\delta_a + T_{\{f'\}}$$

où $a^+ = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}}$, $a^- = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}}$ et $\{f'\}(x) = f'(x)$ pour $x \neq a$.

Preuve 5 : *La preuve se fait par simples calculs :*

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi(x)'\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \left[f(x)\varphi(x)\right]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (f(a^+) - f(a^-))\varphi(a) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'\}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

THÉORÈME 6.2 : Formule des sauts

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$. Alors :

$$\exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n,\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ f_{|]a_i, a_{i+1}[} \in \mathscr{C}^1([a_i, a_{i+1}])$$

On pose $\{f'\}(x) = f'(x)$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a :

$$(T_f)' = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i} + T_{\{f'\}}$$

7 Convergence d'une suite de distributions

DÉFINITION 7.6 : Convergence de distributions

Soit $(T)_n$ une suite de distributions de $\mathscr{D}'(\Omega)$. On dit que (T_n) converge vers la distribution T lorsque :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$$

⋆ **Exemple :** Soit $\theta \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, non nul sur $[-1, 1]$, avec $\theta(0) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R},\ \theta(x) \geqslant 0$ et $\int \theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On pose $\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, avec $\epsilon > 0$.
On considère la suite T_{θ_ϵ}. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, on a :

$$\left\langle T_{\theta_\epsilon}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\epsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\left\langle T_{\theta_\epsilon}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec $y = \frac{x}{\epsilon}$ on a :

$$\left\langle T_{\theta_\epsilon}, \varphi \right\rangle = 1\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\varphi(\epsilon y)\,\mathrm{d}x$$

On vérifie alors les hypothèses du théorème de la convergence dominée :

❶

$$\forall y,\ \theta(y)\varphi(\epsilon y) \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \theta(y)\varphi(0)$$

❷

$$|\theta(y)\varphi(\epsilon y)| \leqslant \sup_{y\in\mathbf{R}} |\varphi(y)|\,|\theta(y)|$$

D'où, par convergence dominée :

$$\left\langle T_{\theta_\epsilon}, \varphi \right\rangle \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\,\mathrm{d}y\right) \varphi(0)$$

i.e.

$$\left\langle T_{\theta_\epsilon}, \varphi \right\rangle \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

⋆

Théorème 7.3 : Convergence de la dérivée

Soit (T_n) une suite de distributions qui converge vers une distribution T. Alors la suite $\left(\frac{\partial T_n}{\partial x_i}\right)$ (i fixé) converge vers $\frac{\partial T}{\partial x_i}$.

8 Support d'une distribution

Rappel :
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$. On considère f une fonction continue sur Ω. Le support de f est :

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x\in\Omega;\ f(x)\neq 0\}}$$

DÉFINITION 8.7 : Vocabulaire

Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ une distribution. On considère ω un *ouvert* inclu dans Ω tel que :

$$T_{|\omega} = 0 \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \mathrm{Supp}(\varphi) \subset \omega,\ \langle T, \varphi \rangle = 0$$

On définit :

$$\mathscr{N}_T = \left\{ \omega \text{ ouvert } \subset \Omega,\ T_{|\omega} = 0 \right\}$$

et :

$$\theta_T = \bigcup_{\omega \in \mathscr{N}_T} \omega$$

PROPRIÉTÉ 8.7 :

1. T s'annule sur l'ouvert θ_T
2. θ_T est le plus grand ouvert sur lequel T s'annule

DÉFINITION 8.8 : Support d'une distribution

En gardant les notations précedemment définies, on a :

$$\mathrm{Supp}(T) = \overline{\Omega} \backslash \theta_T$$

Remarque : *C'est un fermé dans* Ω.

⋆ **Exemple** :

1. $\mathrm{Supp}(\delta_a) = \{a\}$
2. $\mathrm{Supp}\left(\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}\right) = \mathbf{R}$.
3. $\mathrm{Supp}(Y) = \mathbf{R}_+$

Remarque : *Pour une fonction continue f : Supp$(T_f) =$ Supp(f).*

9 Produit de convolution des distributions

9.1 Supports convolutifs

DÉFINITION 9.9 : Supports convolutifs

Soit F_1 et F_2 deux fermés de $\mathbf{R}$. F_1 et F_2 sont convolutifs si pour tout $r > 0$, l'ensemble

$$\Pi_r \ = \ \{(x, y) \in F_1 \times F_2;\ |x + y| \leqslant r\}$$

est **borné** dans $\mathbf{R}^2$, i.e., qu'il existe $\rho(r)$ tel que $|x| + |y| \leqslant \rho$.

Résultats :

❶ $[a, b]$ et $\mathbf{R}$ sont convolutifs.
❷ $[a, +\infty[$ et $[b, +\infty[$ sont convolutifs
❸ $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$ sont convolutifs

9.2 Produit de convolution des fonctions $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$

PROPRIÉTÉ 9.8 : Produit de convolution des fonctions $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$

Soit f et g deux fonctions $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ à supports convolutifs.

❶ $f \forall x \in \mathbf{R}, y \longmapsto f(y)g(x-y) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$.
❷ On définit :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$$

avec $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$.

Résultats : Alors la distribution associé à $f * g$ T_{f*g}, on a :

$$\left\langle T_{f*g}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_f(y), \langle T_g(z)\rangle \varphi(y+z) \right\rangle$$

Alors, on définit :

$$\left\langle T_{f*g}, \varphi \right\rangle = \left\langle T_f * T_g, \varphi \right\rangle$$

9.3 Convolution des distributions

DÉFINITION 9.10 : Convolution des distributions

Soit S et T deux distributions à supports convolutifs. On définit la distribution $S * T$ par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

x et y ne sont là que formellement...

PROPRIÉTÉ 9.9 :

❶ $S * T = T * S$
❷ L'élément neutre $\delta * S = S$
❸ $(S * T)' = S' * T = T' * S$