ESPACE DE HILBERT

1 Notations–Définition

On designe par H un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

DÉFINITION 1.1 :

❶ Une application ℓ de H dans $\mathbf{C}$ est dite **anti-linéaire** si :

$$\forall u \in H,\ \forall v \in H,\ \forall \lambda \in \mathbf{C},\ \ell(u+v) = \ell(u) + \ell(v) \quad \text{et} \quad \ell(\lambda u) = \overline{\lambda}\ell(u)$$

❷ On dit qu'une application b de $H \times H \longrightarrow \mathbf{C}$ qui à (u, v) associe $b(u, v)$ est **une forme sesquilinéaire** sur $H \times H$ si pout tout $u \in H$ et $v \in H$ l'application $u \longmapsto b(u, v)$ est **linéaire** et que l'application $v \longmapsto b(u, v)$ est **anti-linéaire**.

❸ Une forme sesquilinéaire b est dite **hermitienne** si :

$$\forall (u, v) \in H \times H,\ b(u, v) = \overline{b(v, u)}$$

On remarque que pour tout u dans H, $b(u, u) \in \mathbf{R}$.

❹ Une forme sesquilinéaire hermitienne b sur $H \times H$ est dite **positive** si :

$$\forall u \in H,\ b(u, u) \geqslant 0$$

1.1 Propriétés fondamentales

PROPRIÉTÉ 1.1 : Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soit b une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $H \times H$. Alors :

$$\forall (u, v) \in H \times H,\ |b(u, v)| \leqslant (b(u, u))^{\frac{1}{2}} (b(v, v))^{\frac{1}{2}}$$

PROPRIÉTÉ 1.2 : Inégalité de MINKOWSKI

Soit b une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $H \times H$, Alors :

$$\forall (u, v) \in H \times H,\ \ b(u+v, u+v)^{\frac{1}{2}} \leqslant b(u, u)^{\frac{1}{2}} b(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 Produit scalaire

DÉFINITION 1.2 : Produit scalaire

Une forme sesquilinéaire hermitienne positive b sur $H \times H$ est dite **définie** si :

$$\forall u \in H, \ b(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$$

On dit alors que b est un **produit scalire** sur H

Ceci permet de définir une norme sur H :

DÉFINITION 1.3 : Norme

Si $(u,v)_H$ est un produit scalaire sur H, alors l'application :

$$u \longmapsto (u,u)_H^{\frac{1}{2}}$$

est une **norme**.

2 Espace de HILBERT

DÉFINITION 2.4 : Espace de HILBERT

Un espace de HILBERT est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est **complet pour la norme associée**.

⋆ Exemple :

❶ Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, alors l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de HILBERT.

❷ On peut vérifier que l'espace ℓ^2 consitué des suites de nombres complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que :

$$\sum |a_n|^2 < +\infty$$

est un espace de HILBERT.

⋆

3 Le théorème de projection

3.1 Sous espace convexe

DÉFINITION 3.5 : Sous espace convexe

On dit qu'un sous-ensemble K de H est convexe si :

$$\forall (u,v) \in K \times K,\ \forall t \in [0,1],\ ((1-t)u + tv) \in K$$

En particulier, un sous-espace vectoriel de H est convexe.

THÉORÈME 3.1 : De projection

Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide (H un espace-vectoriel). Alors :

❶

$$\forall u \in H,\ \exists! Pu \in K,\ \forall v \in K,\ ||u - Pu|| \leqslant ||u - v||$$

❷ Pu est caractérisé par la propriété suivante :

$$Pu \in K \quad \text{et} \quad \forall v \in K,\ \Re(u - Pu, v - Pu) \leqslant 0$$