1 Équations elliptiques

1.1 Le problème

Soit Ω un *ouvert* borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière notée $\partial\Omega$ qu'on suppose suffisamment régulière. Soit f une fonction *donnée* sur Ω.
On considère l'équation de LAPLACE-POISSON :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Classiquement, on considère trois types de conditions aux limites :

❶ $u = g$ sur $\partial\Omega$, c'est la *condition de* DIRICHLET ;
❷ $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur sur $\partial\Omega$, c'est la *condition de* NEUMANN ;
❸ $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g$ sur sur $\partial\Omega$, c'est la *condition de* FOURIER ;

où n désigne le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et g est une fonction donnée sur $\partial\Omega$. On note respectivement ces trois problème (P_D), (P_N) et (P_F).

1.2 Solutions classiques au problème de LAPLACE

Définition : Solution classique

❶ On appelle solution classique du problème de DIRICHLET (P_D) toute fonction $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ qui vérifie (P_D).

❷ On appelle solution classique du problème de NEUMANN [resp. FOURIER] toute fonction $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ qui vérifie (P_N) [resp. (P_F)].

1.2.1 Formules de GREEN dans le cas *classique*

Propriété : Formules de Green

❶ Soient $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathscr{C}^1(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u\, v \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\Gamma \tag{1}$$

❷ Soient $u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u\, v \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u \Delta v \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

1.2.2 Principe de maximum

Propriété : Principe de maximum

Soit $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique dans un ouvert borné connexe Ω (*i.e.* vérifiant $\Delta u = 0$ dans Ω). Si la fonction u n'est pas constante dans $\overline{\Omega}$ alors on a :

$$\forall x \in \Omega, \quad \inf_{\partial\Omega} u < u(x) < \sup_{\partial\Omega} u$$

CHUPIN Maxime – 11 novembre 2009

Théorème : Unicité de la solution classique

Le problème de DIRICHLET admet au plus une solution classique dans $\mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$.

1.3 Formulation variationnelle

Éclaircissons la notion de frontière suffissament régulière.

Définition : Frontière *lipschitzienne*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Sa frontière $\partial\Omega$ est *lipschitzienne* si

1. en tout point x de $\partial\Omega$, il existe une application lipschitzienne (définie sur un hypercube de $\mathbb{R}^{n-1}$ à valeur dans $\mathbb{R}$), dont le graphe représente localement $\partial\Omega$ dans un voisinage de x ;
2. en tout point x de $\partial\Omega$, Ω est localement d'un seul coté de $\partial\Omega$.

On se place souvent dans $\mathbb{R}^n$, ceci nous permet d'établir des résultats de densité très utiles.

Définition :

On appelle $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ l'espace composé des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Soit $m \in \mathbb{N}$. Dans tout ouvert borné Ω à frontière lipschitzienne, $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est *dense* dans $H^m(\Omega)$.

1.3.1 Existence de *trace*

On considère l'ensemble $L^2(\partial\Omega) = \{w \text{ mesurable sur } \partial\Omega \,/\, \int_{\partial\Omega} w^2 \,\mathrm{d}\Gamma\}$. C'est un espace de HILBERT muni du produit scalaire *usuel*.

Théorème : Existence de trace

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière « suffisamment régulière ». Alors l'application *trace*

$$\gamma_0 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ x & \longmapsto & \gamma_0 x = x_{|\partial\Omega} \end{array}$$

se pronlonge par continuité en application linéaire continue, notée encore γ_0, de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et il existe une constante C indépendante de x telle que

$$\left\|\gamma_0 x\right\|_{L^2\partial\Omega} \leqslant C \left\|x\right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Attention : l'application trace γ_0 n'est pas *surjective* de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Par contre, elle est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Propriété :

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'indice fractionnaire $1/2$. On a :

❶ $H^1(\partial\Omega) \subset H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$

❷
$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ w \in L^2(\partial\Omega) \Big/ \exists v \in H^1(\Omega),\ w = \gamma_0 v \right\}$$

❸ L'espace des traces est un espace de Banach. Qui plus est, on peut munir $H^{1/2}(\partial\Omega)$ de la norme :
$$\|w\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in H^1(\Omega),\, \gamma_0 v = w} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

❹ $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$

Définition : $H^1_0(\Omega)$

$\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ mais pas dans $H^1(\Omega)$. On introduit alors :
$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$
C'est un espace de Hilbert comme sous-espace fermé d'un espace de Hilbert.

Théorème : Caractérisation de $H^1_0(\Omega)$

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière « suffisamment », alors :
$$H^1_0(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \Big/ \gamma_0 v = 0 \right\}$$

On peut alors généraliser la formule de Green.

Propriété : Formule de Green

Soient u et v de $H^1(\Omega)$, on a :
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} u v n_i \,\mathrm{d}\Gamma$$

Théorème : Trace de la dérivée

L'application trace de la dérivée normale :

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega) \\ x & \longmapsto & \gamma_1 x = \left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_{|\partial\Omega} \end{array}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue, notée encore γ_1, de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et on a l'inégalité :

$$\left\|\gamma_1 v\right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C \left\|v\right\|_{H^2(\Omega)}$$

Propriété : Formule de Green

Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1[\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\Gamma$$

Définition :

On définit l'ensemble Φ :

$$\Phi = \left\{ v \in H^1(\Omega) \middle/ \Delta v \in L^2(\Omega) \right\}$$

muni du produit scalaire :

$$\langle v \rangle w_\Phi = \langle v \rangle w_{H1(\Omega)} + \langle v \rangle w_{Ł^2(\Omega)}$$

Propriété : Formule de Green

On peut généraliser la formule de Green :

$$\forall w \in \Phi, \, v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega \Delta w \, v \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, \mathrm{d}\Omega = \left\langle \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Rappel : Une forme ℓ linéaire est continue si

$$\exists C_\ell > 0, \; \forall v \in H, \quad |\ell(v)| \leqslant C_\ell \left\|v\right\|_H,$$

une forme a bilinéiare est continue si

$$\exists C_a > 0, \; \forall v, u \in H, \quad |a(u,v)| \leqslant C_a \left\|v\right\|_H \left\|u\right\|_H,$$

elle est coersive si

$$\exists \alpha > 0, \; \forall v \in H, \quad a(v,v) \geqslant \alpha \left\|v\right\|_H$$

Théorème : Lax-Milgram

Soit H un espace de ilbert, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et coersive sur H, $\ell(\cdot)$ une forme linéaire continue sur H. ALors il existe une unique solution $u \in H$ au problème

$$\forall v \in H,\ a(u,v) = \ell(v).$$

En outre la solution dépend continûment de la forme linéaire ℓ :

$$\|u\|_H \leqslant C\,\|\ell\|_{H'}.$$

Propriété : Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante C_p, dépendante seulement de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}\Omega \leqslant C_p \int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}\Omega$$

2 Introduction à la méthode des éléments finis

2.1 Formulation

Les problème elliptiques sont tous de la forme :

$$\begin{array}{c}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V,\ a(u,v) = \ell(v)\end{array} \tag{3}$$

avec V un Hilbert, a est une forme bilinéaire continue et coersive et ℓ une forme linéaire continue.

2.2 Approximationde Galerkin

Considérons V_h un sous-espace de V de dimension finie $n = n(h)$ où h est un paramètre positif destiné à tendre vers 0, avec $\lim_{h\to 0} n(h) = \infty$.
On introduit le problème variationnel approché suivant :

$$\begin{array}{c}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h,\ a(u_h,v_h) = \ell(v_h)\end{array} \tag{4}$$

On remarque qu'on peut toujours appliquer le théorème de Lax-Milgram car V_h est encore un Hilbert comme sous-espace fermé d'un Hilbert.

Propriété : Éxistence et unicité

Ce ce qui précède, on en déduit que le problème variationnel approché admet une unique solution.

Propriété : Système linéaire

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de l'espace vectoriel V_h. Alors le problème approché (4) est équivalent au système linéaire posé dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{L}$$

où, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathbf{A}_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ et $\mathbf{L}_i = l(\varphi_i)$. Et on a :

$$u_h = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j.$$

Attention : Il est important de remarquer que :

$$a \text{ coersive} \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ définie-positive}$$

2.3 Convergence

Lemme : de Cea

Il existe une constante $C >$, indépendante de V_h telle que :

$$\left\|u - u_h\right\|_V \leqslant C \inf_{v_h \in V_h} \left\|u - v_h\right\|_V$$

Théorème : Convergence de l'approximation

On suppose qu'il existe un sous-espace W dense dans V et, pour chaque h, une application r_h de W dans V_h tels que :

$$\forall v \in W \quad \lim_{h \to 0} \left\|v - r_h v\right\|_V = 0.$$

Alors, on a :

$$\lim_{h \to 0} \left\|u - u_h\right\|_V = 0$$

2.4 La méthode des éléments finis

Définition : Éléments finis de Lagrange P^1

On considère un *maillage* de l'ouvert Ω, par exemple une partition de L triangles (en dimension 2).

Nous supposons que cette partition vérifie les propriétés suivantes :

1. Tout triangle T_ℓ est d'intérieur non vide ;
2. $\mathring{T}_\ell \cap \mathring{T}_{\ell'} = \emptyset$ si $\ell \neq \ell'$;
3. $\bigcup_\ell T_\ell = \overline{\Omega}$;
4. toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière $\partial\Omega$.

On peut construire ainsi V_h :

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \,\middle/\, \forall \ell \in [\![1,L]\!],\ v_h\big|_{T_\ell} \text{ est affine} \right\}$$

Propriété :

L'espace V_h est un espace vectoriel de dimension N dont une base est donnée par les fonctions continues et affines par morceaux $(w_j)_j$ qui satisfont aux relations :

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2, \quad w_j(M_i) = \delta_{ij}$$

Définition : Éléments finis de Lagrange d'ordre k

On appelle élément fini de Lagrange d'ordre k un triplet (K, Σ, P) où K est un *fermé borné non vide* de $\mathbb{R}^n$, Σ un ensembme de n_K point $(M_i^K)_i$ appartenant à K et P un espace vectoriel de polynômes contenant $\mathbf{P}^k(K)$ (espace de polynôme de degré au plus k sur K) tels que :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_K}) \in \mathbb{R}^{n_K},\ \exists! p \in P \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n_K]\!],\ p(M_i^K) = \alpha_i$$